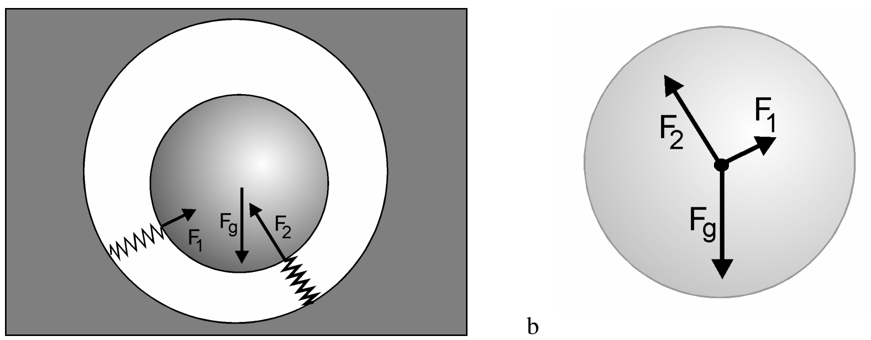
PODSTAWY MECHANIKI

(pierwszy rozdział podręcznika „Fizyka na starcie")

Mechanika jeszcze w XIX wieku traktowana była jako część matematyki (to przecież z mechaniki pochodzi stosowany obecnie we wszystkich dziedzinach wiedzy rachunek różniczkowy i całkowy). Spostrzeżono jednak jej praktyczny związek z takimi dziedzinami jak np. fizyka dużych szybkości czy fizyka światła. Dlatego obecnie jest działem fizyki, w jakim analizuje się stany materii w przestrzeni i czasie. Podstawy mechaniki są jednocześnie podstawami fizyki, ponieważ wprowadzają grupę pojęć wykorzystywanych we wszystkich działach, zarówno fizyki klasycznej, jak i współczesnej, a także w różnego rodzaju dziedzinach inżynierskich.
W dydaktyce fizyki **mechanika** dzieli się na dwa poddziały: **statykę** i **dynamikę**.

STATYKA, to analiza zachowań materii, na jaką działają siły; przy czym **siły te równoważą się!** Na przykład dwie sprężyny widoczne na rys. 1.1 „podpierają" kulę o ciężarze F_g. Owo podpieranie, to nacisk dwóch sił F_1 i F_2 składających się na siłę wypadkową, równoważącą siłę ciężaru F_g.



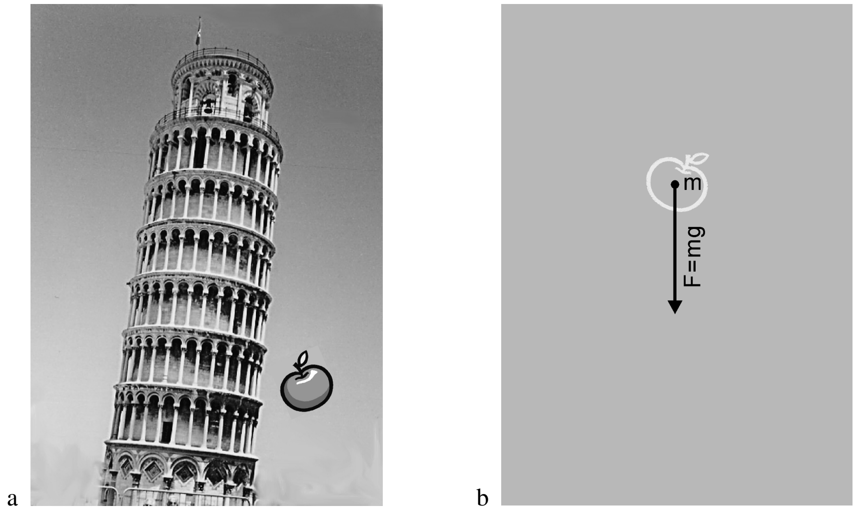
a b

Rys. 1.1. Przykład statyczny (a) oraz jego matematyczny model (idea) w zobrazowaniu graficznym (b).
Czytelnik może sprawdzić metodą graficzną, czy suma sił F_1, F_2 i F_3 rzeczywiście równa jest zeru.

DYNAMIKA, to analiza zachowań materii, na jaką działają **siły niezrównoważone**. Powiedzmy to w inny sposób: jest to sytuacja, w jakiej na określoną masę działa (niezerowa) siła i, w wyniku jej działania, masa ta porusza się ruchem zmiennym. Na przykład na rys. 1.2 jabłko porusza się ruchem jednostajnie zmiennym, ponieważ działa na nie stała siła przyciągania ziemskiego (warto poszukać w na stronach internetowych informacji pojawiających się w wyniku zestawienia haseł: *„Tower of Pisa" + Galileo/Galileusz*). W rzeczywistości ruch jednostajnie zmienny - to tylko model-idea, ponieważ pominięty został opór powietrza, ewentualny wiatr i jego zawirowania, nierównomierność przestrzennego rozkładu pola grawitacyjnego, elektryzowanie podczas tarcia o powietrze, itd.

Dygresja

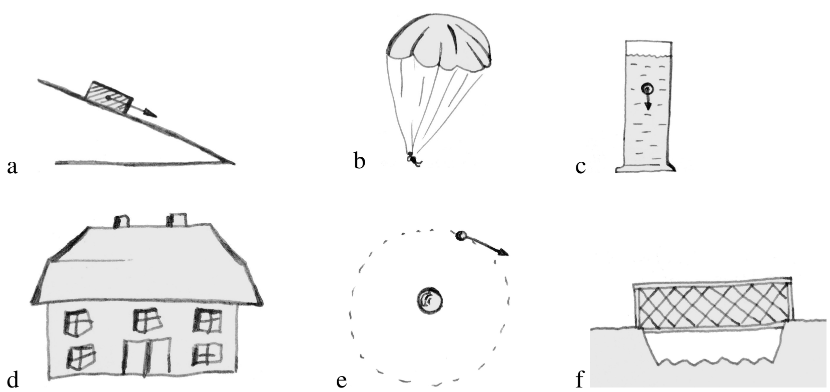
W przyrodzie nie ma zjawisk, których przebieg w pełni odpowiadałby wyobrażeniu idealnemu (jako że swoim przebiegiem co najwyżej upodabniają się do idei). Powiedzmy to inaczej: w fizyce posługujemy się modelami/ideami, czyli uproszczonymi opisami zjawisk – poszukujemy zatem prostych zasad (modeli, idei), jakie w zadowalającym stopniu pozwolą przewidywać przebieg zjawisk. Jeżeli pojawiają się trudności - wprowadza się także fenomenologiczne opisy zjawisk i dobiera do nich formuły matematyczne.



Rys. 1.2. Przykład dynamiczny (a) oraz jego idea (b).
Czy jakieś elementy obrazka po lewej odpowiadają przypadkowi statycznemu?

Uwaga! Materię w stanie ruchu jednostajnego należy również traktować jako przypadek statyczny, ponieważ w układzie poruszającym się jednostajnie z prędkością tej materii, materia owa trwa w bezruchu (pozostaje w spoczynku).

Warto rozważyć przykłady na rys. 1.3 i ustalić, które z nich przedstawiają sytuację statyczną, a które dynamiczną.



Rys. 1.3. Przykłady statyczne i dynamiczne. Do statycznych należą te, w jakich suma przyłożonych sił jest równa zeru. Np. dom stoi w nieruchomo (nie zapada się), bo jego ciężar zrównoważony jest przez oddolny nacisk gruntu, a kulka w cieczy opada ruchem jednostajnym, ponieważ ciężar zrównoważony jest siłą wyporności i siłą Stokesa. Tylko sytuacje a i e zaliczają się do dynamicznych. W przypadku a jest to ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy, a w przypadku b - ruch zmienny, ponieważ przyśpieszenie (tzw. przyśpieszenie dośrodkowe) cały czas się zmienia (co do kierunku i zwrotu).

Dom i most na rys 1.3d i 1.3f dla obserwatora związanego z powierzchnią Ziemi są sytuacjami statycznymi. Natomiast Księżyc krążący wokół Ziemi (rys. 1.3e), dla każdego obserwatora stanowi przypadek dynamiczny (ponieważ grawitacyjna siła przyciągania dośrodkowego w tym ruchu stale się zmienia, i to zarówno co do kierunku jak i zwrotu). Spadochroniarz (rys. 1.3b) to także sytuacja statyczna, ponieważ siła przyciągania grawitacyjnego jest zrównoważona siłą oporu powietrza działającą na czaszę spadochronu (siła oporu powietrza jest proporcjonalna do szybkości ruchu spadochronu). Kulka opadająca w cieczy (rys. 1.3c) – to kolejna sytuacja statyczna, ponieważ siła grawitacyjna działająca na kulkę jest zrównoważona dwiema siłami:

- tzw. siłą Stokesa, czyli siłą, która działa na kulkę w tym samym kierunku, ale ze zwrotem przeciwnym do zwrotu opadania (siła Stokesa jest proporcjonalna do promienia kulki i szybkości jej opadania);
- siłą Archimedesa (siła Archimedesa - zwana siłą wyporności - jest równa ciężarowi cieczy o objętości kulki, o kierunku pionowym, ze zwrotem do góry).

W początkowej chwili opadania kulki siły nie są jeszcze zrównoważone (sytuacja dynamiczna). Dopiero po osiągnięciu przez kulkę odpowiedniej szybkości mamy do czynienia z sytuacją statyczną. A klocek zsuwający się z równi pochyłej (rys. 3a)? Otóż, jeżeli składowa siły grawitacyjnej wzdłuż równi jest większa od siły tarcia – mamy do czynienia z sytuacją dynamiczną. Ale może się zdarzyć, że siła tarcia jest równa sile zsuwającej. Wtedy klocek jest nieruchomy względem równi, albo porusza się ruchem jednostajnym – będzie to sytuacja statyczna (ale mało w tym przypadku prawdopodobna). Nawiązując jeszcze raz do rys. 2a zauważymy, że gdyby przedstawiona na tym rysunku „*the Pisa Tower*" była dużo wyższa (może jak biblijna wieża Babel ;-) jabłko rozpędziło by się tak bardzo, że siła grawitacyjna zrównałaby się z siłą oporu powietrza (podobnie jak w przypadku kulki spadającej w cieczy na rys. 3c). Jest możliwe sformułowanie kinematycznej zasady, wg jakiej ustalamy, czy materia jest w stanie statycznym, czy nie. Oto owa zasada: jeżeli można obserwatora umieścić w układzie współrzędnych poruszającym się ruchem jednostajnym tak, że obserwator widzi materię w bezruchu – to na pewno jest to sytuacja statyczna. Dlatego – uwaga! To, że widzimy iż materia przemieszcza się, wcale nie jest dowodem, że nie znajduje się ona w sytuacji statycznej!

W mechanice, oprócz pojęcia „<u>sta</u>tyka" i „dy<u>na</u>mika" funkcjonuje pojęcie „kine<u>ma</u>tyka" (podkreślenia wskazują miejsce akcentu podczas wypowiadania tych wyrazów). Kine-<u>**ma**</u>-tyka to dział <u>**fi**</u>**zyki** zajmujący się opisywaniem ruchu bez rozważań nad tym, jakie siły ten ruch wywołują. Jednakże to, co zaliczamy do kine<u>ma</u>tyki zawarte jest także w dy-<u>**na**</u>-mice, gdzie opisuje się ruch, ale na podstawie znajomości sił działających na materię. W zasadzie, jeśli rozpatrywać opis matematyczny określonego ruchu, to i <u>sta</u>tykę można uważać za szczególny (trywialny) przypadek dy<u>na</u>miki; mianowicie, jest to przypadek dynamiczny, w jakim wypadkowa siła działająca na materię przyjmuje wartość zerową.

1.1. Zagadnienia matematyczne jakie nie powinny stwarzać trudności absolwentowi szkoły średniej

Tytuł tego rozdziału sformułowany jest w nieco przewrotny sposób, gdyż należałoby powiedzieć, że chodzi tu raczej o apel do Abiturientów, aby zechcieli przypomnieć sobie niektóre szkolne zagadnienia matematyczne, a w szczególności te, które są wskazane poniżej.

1.1.1. Funkcja a równanie

Wyrażenia (formuły) matematyczne w fizyce to **funkcje** lub **równania**.

W mechanice spotykamy się najczęściej z funkcjami czasu. Najprostszą z nich jest zależność współrzędnej (na danej osi) od czasu. Na przykład, rozpoczynający się na określonej wysokości pionowy rzut kamieniem do góry warto rozważać jako zmiany współrzędnej na poprowadzonej pionowo osi. Osią tą powinna być prosta równoległa do ruchu kamienia. Oś musi mieć początek (czyli punkt zerowy), i musi być skierowana (tzn. należy arbitralnie ustalić w jakim kierunku odłożone są wartości dodatnie, a w jakim ujemne – a następnie zaznaczyć to strzałką na końcu osi). Przyjmijmy, że początek osi współrzędnych znajduje w miejscu rzutu kamienia (w miejscu rozpoczęcia jego ruchu), natomiast jej zwrot - do góry (rys. 1.4). Ruch rozpoczyna się na współrzędnej „zero", przez chwilę odbywa się do góry, po czym rozpoczyna się spadanie w dół. Proszę zauważyć, że współrzędna początkowa y_o nie wynosi tutaj h, ale zero! Natomiast w momencie uderzenia w ziemię, współrzędna będzie wynosiła $-h$ (minus h).

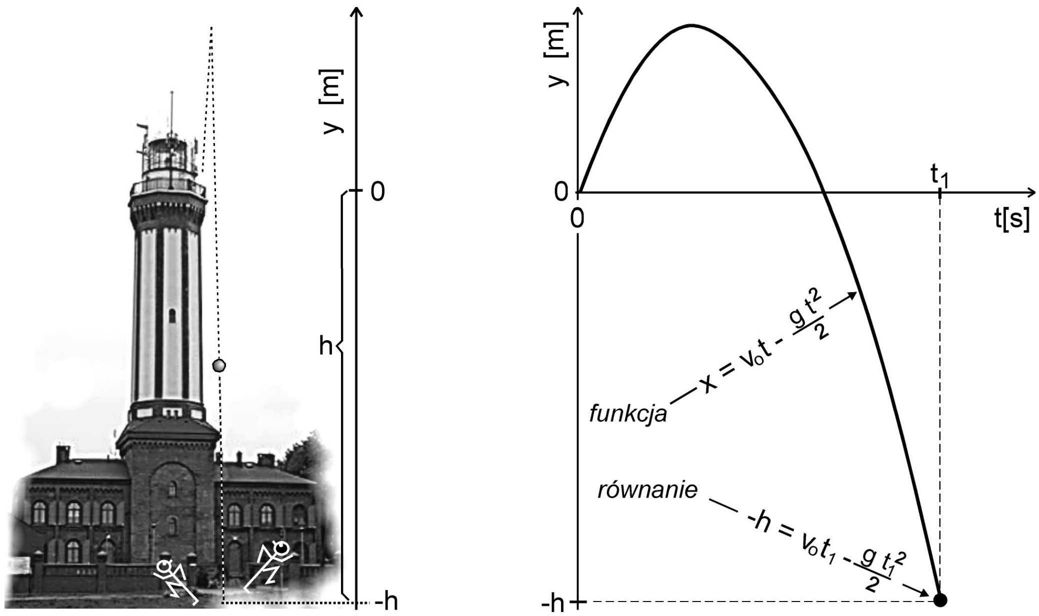
Idea ruchu tego kamienia, to przemieszczanie się punktu (np. środka masy kamienia) wzdłuż prostej pionowej. Dzięki wprowadzeniu osi x, idea ta przybiera kształt matematyczny w postaci funkcji (1.1):

$$x(t) = v_o t - \frac{g t^2}{2} \tag{1.1}$$

gdzie: v_o - szybkość początkowa kamienia

t - zmienna niezależna, czyli czas

g - przyspieszenie ziemskie



Rys. 1.4. Funkcja i równanie. Graficznym **zobrazowaniem funkcji jest tutaj parabola** (wyrażenie 1.1), a **zobrazowaniem równania jest punkt o współrzędnych t_1,-h**.

Uwaga ! Równanie powstaje przez wstawienie wartości do funkcji (tak jak wstawienie punktu do linii wykresu)

Jeżeli do funkcji wstawimy jej wartości w określonym punkcie – otrzymamy równanie. Graficznym zobrazowaniem funkcji jest linia, natomiast zobrazowaniem równania jest punkt na tej linii.

1.1.2. Skalar a wektor

Jeżeli do scharakteryzowania określonej wielkość fizycznej konieczna jest informacja o jej ukierunkowaniu w przestrzeni (oprócz podania jej wartości), to na pewno mamy do czynienia z wielkością wektorową. Na przykład prędkość jest wektorem, a szybkość – skalarem; bo, np. policjant wypisuje mandat za przekroczenie szybkości (nie prędkości). Chyba, że kierowca poruszał się pod prąd na jezdni jednokierunkowej... Wtedy pojazd miał, niewątpliwie, niewłaściwą prędkość (jej wektor miał zwrot niezgodny ze zwrotem prędkości uczestników ruchu respektujących znaki drogowe). Czyli: niewłaściwa prędkość to prędkość w niedobrym kierunku i zwrocie, niewłaściwa szybkość – za dużo na liczniku (poprawnie należałoby powiedzieć: „wskaźniku szybkości”, lub „tachometrze”).

Należy zatem wyraźnie podkreślić, że wektor posiada trzy cechy (skalar tylko jedną - wartość):

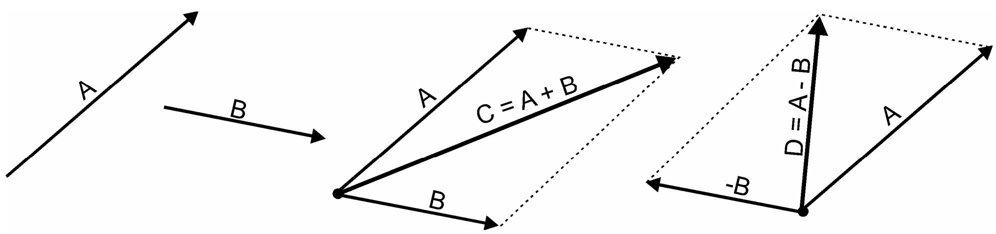
- wartość,
- kierunek,
- zwrot.

Wektor nie zmienia się, jeżeli jest przemieszczany translacyjnie (co znaczy, że każdy jego punkt przemieszczany jest tak samo). Dlatego punkt przyłożenia wektora – nie jest cechą wektora (**!**), ale w określonych przypadkach fizykalnych podanie punktu przyłożenia może być konieczne (np. metacentrum siły wyporu).

Wektory podlegają działaniom matematycznym zwanymi **sumowaniem wektorów** i **mnożeniem wektorów**. Przy czym mnożenie odbywa się w dwojaki sposób: **skalarny** i **wektorowy**.

Graficzne sumowanie wektorów

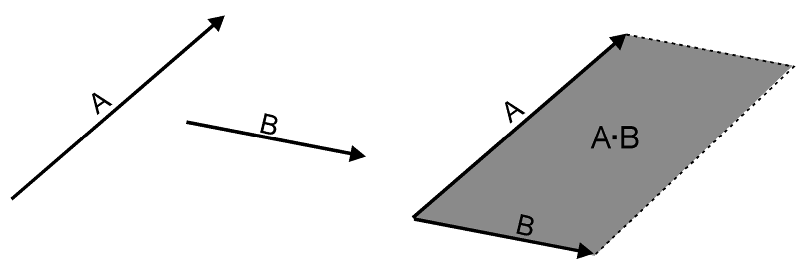
Przed graficznym sumowaniem wektorów przemieszczamy je tak, żeby ich początki znalazły się w tym samym punkcie. Następnie tworzymy równoległobok (jak na rys. 1.5) i łączymy punkt początków wektorów z przeciwległym wierzchołkiem równoległoboku.



Rys. 1.5. Graficzne sumowanie wektorów.

Mnożenie skalarne wektorów

Wynik mnożenia skalarnego to iloczyn wartości wektorów pomnożony przez kosinus kąta pomiędzy nimi.

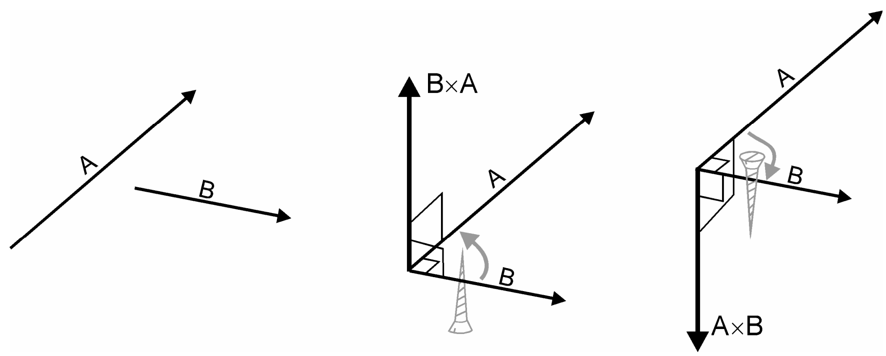


Rys. 1.6. Iloczyn skalarny.

Wynik mnożenia graficznego jest wielkością skalarną, a w odniesieniu do interpretacji graficznej jest to powierzchnia równoległoboku, którego boki tworzą wymnażane wektory.

<u>Mnożenie wektorowe wektorów</u>

Wynik mnożenia wektorowego to, w przeciwieństwie do mnożenia skalarnego, wielkość wektorowa. Wartością wyniku mnożenia wektorowego jest iloczyn wartości wektorów pomnożony przez sinus kąta pomiędzy nimi. Kierunek i zwrot iloczynu wektorowego określany jest za pośrednictwem tzw. reguły śruby prawoskrętnej (rys. 1.7).

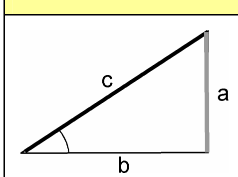
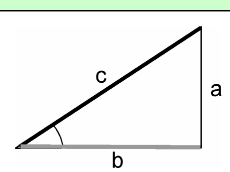
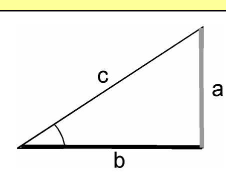
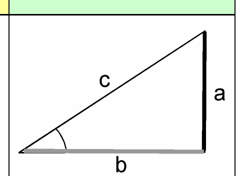


Rys. 1.7. Iloczyn wektorowy. Wynik mnożenia wektorowego jest zgodny z kierunkiem wkręcania wyimaginowanej śruby prawoskrętnej.

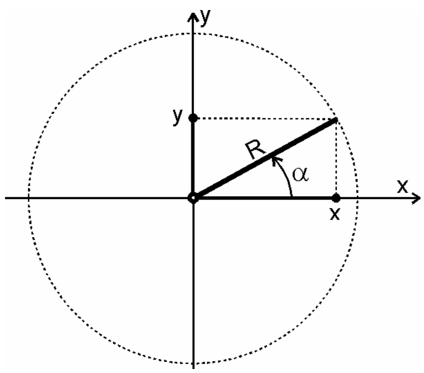
1.1.3. Funkcje trygonometryczne

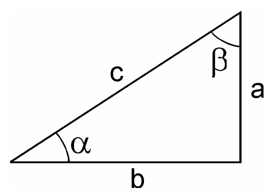
W rozwiązywaniu problemów mechanicznych niezbędna jest znajomość podstaw trygonometrii. Oprócz szybkiego kojarzenia boków i kątów w trójkątach z odpowiednimi funkcjami trygonometrycznymi, konieczny jest nawyk posługiwania się <u>twierdzeniem sinusów</u> i <u>twierdzeniem kosinusów</u>. Spośród tzw. wzorów trygonometrycznych najważniejsza jest jedynka trygonometryczna. Praktyka dydaktyczna pokazuje, że nie są to wcale zagadnienia trywialne, dlatego powtórzmy je jeszcze raz. I tak: przyprostokątna przyległa i przyprostokątna przeciwległa, to terminy na określenie boków w stosunku do określonego kąta ostrego. W stosunku do drugiego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym - ich nazwy wystąpią na odwrót. W tabeli 1.1 przedstawione są definicje funkcji trygonometrycznych jako stosunki odpowiednich boków w trójkącie prostokątnym. Ale to jest tylko wstęp do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych, bowiem w celu ogólnego zdefiniowania funkcji trygonometrycznych posługujemy się tzw. promieniem wodzącym i jego rzutami na osie x-ów i y-ów (tab. 1.2). W trójkącie argument funkcji trygonometrycznych zamyka się w dziedzinie od 0 do 90^{o}. Natomiast w definicji ogólnej – od 0 do nieskończoności.

Tab. 1.1. Definicje funkcji trygonometrycznych kąta od 0 do $\pi/2$ jako stosunki boków w trójkącie

sinus (*sin*)	**kosinus (*cos*)**	**tangens (*tg*)**	**kotangens (*ctg*)**
przyprostokątna przeciwległa, do przeciwprostokątnej	**przyprostokątna przyległa, do przeciwprostokątnej**	**przyprostokątna przeciwległa, do przyprostokątnej przyległej**	**przyprostokątna przyległa, do przyprostokątnej przeciwległej**
 a/c	 b/c	 a/b	 b/a

Tab. 1.2. Definicje funkcji trygonometrycznych kąta dowolnego

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>sinus (sinα)
y/R</td></tr>
<tr><td>kosinus (cosα)
x/R</td></tr>
<tr><td>tangens (tgα)
y/x</td></tr>
<tr><td>kotangens (ctgα)
x/y</td></tr>
</table>

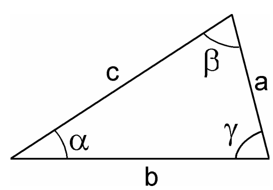


Rys. 1.8. Oznaczenia boków i kątów w trójkącie prostokątnym.

W trójkącie na rys. 1.8 zgodnie z prawem Pitagorasa:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1.2}$$

Jedynka trygonometryczna: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ oraz $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$



Rys. 1.9. Oznaczenia boków i kątów w trójkącie dowolnym.

W trójkącie dowolnym (rys. 1.9) obowiązują tzw. twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów.

Twierdzenie sinusów:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \tag{1.3}$$

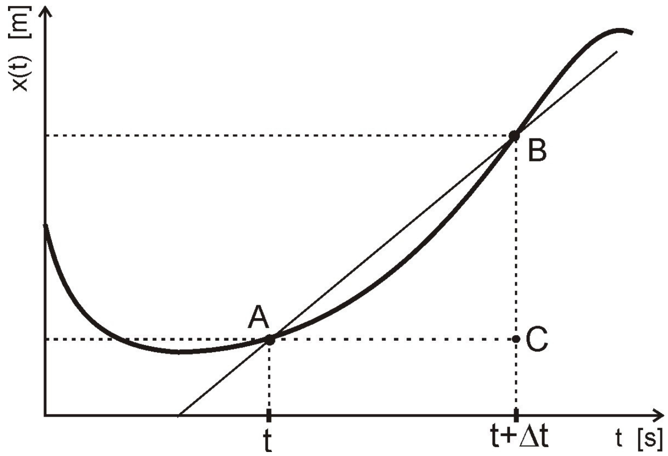
Twierdzenie kosinusów:

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \end{aligned} \tag{1.4}$$

Znając powyższe zasady można rozwiązać każdy problem trygonometryczny, a inne, przydatne w pewnych sytuacjach, związki trygonometryczne łatwo znaleźć w tablicach matematycznych.

1.1.4. Pochodna funkcji

Podstawowym pojęciem zmierzającym do zdefiniowania pochodnej funkcji jest iloraz różnicowy. Iloraz różnicowy funkcji opisującej położenie (współrzędną) punktu w zależności od czasu – to prędkość średnia (rys. 1.10).



Rys. 1.10. Rysunek do definicji ilorazu różnicowego.

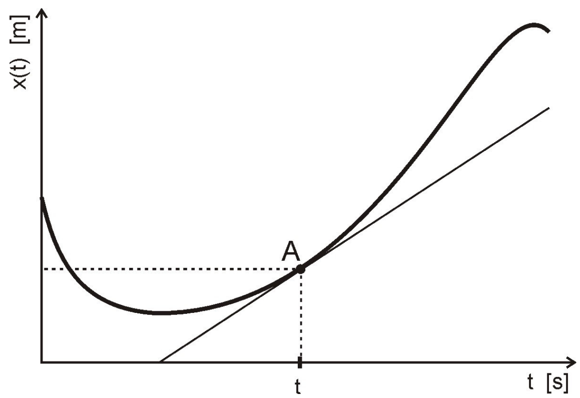
Iloraz różnicowy v(t→Δt) w momencie t dla przedziału czasowego Δt wyraża funkcja 1.5

$$\boxed{v(t \to (t+\Delta t)) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}} \qquad (1.5)$$

Na rys. 1.10 przedstawiono wykres funkcji oraz sieczną przechodzącą przez punkty o współrzędnych odpowiadających wartościom funkcji dla dowolnego momentu t oraz dla momentu o Δt późniejszego. Nachylenie tej siecznej to matematycznie: **iloraz różnicowy funkcji**, fizycznie – **prędkość średnia** w czasie od t do t+Δt.

Przy okazji uwaga: nachylenie prostej, to **NIE (!!!)** „*tangens kąta pomiędzy tą prostą a osią odciętych t*”, ponieważ figura ARC to nie trójkąt! Każdy „bok” ma przecież inną jednostkę: „przyprostokątna przyległa” – sekundy, „przyprostokątna przeciwległa” – metry. A „przeciwprostokątna”? Otóż w zbiorze znanych nam pojęć w ogóle nie ma pojęcia jednostki dla niej! Uwaga! Przecież to nie „*przeciwprostokątna*”! – to po prostu „sieczna” punktów A i B. **Nachylenie** tej siecznej (iloraz różnicowy) to wynik podzielenia BC (w tym przypadku wyrażonego w metrach) przez AC (wyrażonego w sekundach). Zatem nachyleniu siecznej na wykresie x = f(t) przyporządkowana będzie jednostka „m/s”. Jest to oczywiste, bo przecież nachylenie w tym przypadku jest prędkością (prędkością średnia w czasie Δt).

Pochodna – to również iloraz różnicowy, ale w sytuacji, gdy przedział czasowy Δt jest nieskończenie mały (mówi się: "dąży do zera"). Wtedy sieczna staje się styczną w punkcie o współrzędnych (t, x(t)). Nachylenie tej stycznej – to pochodna (rys. 1.11). Proszę zawsze zwracać uwagę na to, żeby **NIE MÓWIĆ (!!!)**, że pochodna w punkcie to *„tangens nachylenia stycznej w tym punkcie"*, ponieważ zobrazowanie graficzne pochodnej w danym punkcie funkcji (punkcie na wykresie funkcji), to **nachylenie** stycznej w tym punkcie.



Rys. 1.11. Rysunek do definicji pochodnej funkcji.

Pochodną v(t) w momencie t wyraża funkcja 1.6.

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}} \tag{1.6}$$

Wartości pochodnej funkcji w poszczególnych jej punktach można wyznaczać graficznie, tak jak pokazano na rys. 1.11, dzieląc BC przez AC (wartość Δt jest tutaj dowolna).

Pochodną można wyznaczać numerycznie i analitycznie. Numerycznie, czyli z ilorazu różnicowego przy bardzo małym Δt, a analitycznie – z definicji (wyrażenie 1.6). Dla przykładu policzmy pochodną funkcji $x=2+3t+4t^2$.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2+3(t+\Delta t)+4(t+\Delta t)^2 - (2+3t+4t^2)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2+3t+3\Delta t+4t^2+8t\Delta t+4\Delta t^2 - 2 - 3t - 4t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(3+8t+\Delta t) = 3+8t$$

Uwaga! Pochodne typowych funkcji (funkcji elementarnych) podawane są w formie matematycznych wzorów w tablicach matematycznych. Na przykład pochodna względem czasu funkcji

$\mathbf{x = a\, t^n}$ to $\mathbf{v = a\, n\, t^{n-1}}$,

funkcji $\mathbf{x = a \sin bt}$ to $\mathbf{v = ab \cos bt}$,

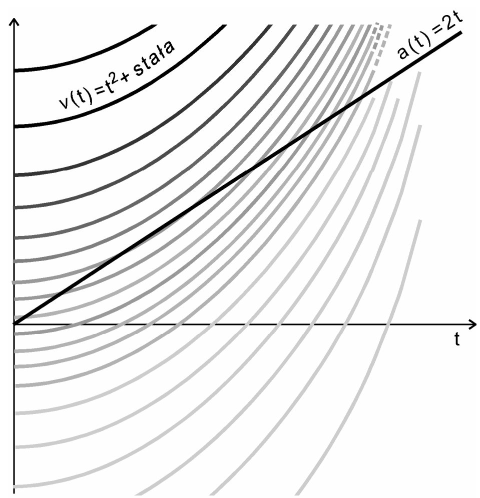
funkcji $\mathbf{x = a\, e^{bt}}$ to $\mathbf{v = a\, b\, e^{bt}}$.

Pochodna sumy funkcji to suma pochodnych, ale już pochodna iloczynu dwóch funkcji – to NIE (!) iloczyn pochodnych. Korzystając z definicji pochodnej można wyprowadzić matematyczny wzór na pochodną iloczynu, a także na pochodną ilorazu. Wzory te, wraz ze wzorem na pochodną funkcji złożonej, można znaleźć w większości tablic matematycznych.

Uwaga! Słowo/pojęcie „**wzór**” zarezerwowane jest dla matematyki i inżynierii. W fizyce wszystkie możliwe formuły matematyczne to funkcje, równania i definicje !!!
Nie można z racji braku umiejętności rozróżniania pojęć **funkcja–równanie–definicja**, właściwe dla danego pojęcia słowo - zastępować słowem „wzór” ! Proszę wnikliwie spojrzeć na rys. 1.4.

1.1.5. Całka nieoznaczona

Całkowanie jest działaniem odwrotnym do znajdowania pochodnej (różniczkowania). Inaczej mówiąc, całkowanie danej funkcji, to znajdowanie funkcji pierwotnej (funkcja pierwotna to funkcja, której pochodna jest funkcją całkowaną). Jednakże, jeżeli policzymy pochodną pewnej funkcji x(t), czyli otrzymamy funkcję v(t), to całkując funkcję **v(t)** otrzymamy funkcję **x(t) + dowolna stała**. W fizyce stała ta zawsze ma znaczenie fizykalne. Aby określić wartość tej stałej, trzeba znać tzw. warunek brzegowy (np. jaka jest wartość całki w zerze, w nieskończoności bądź przy jakiejś innej wartości zmiennej niezależnej t).



Rys. 1.12. Funkcja a(t) i jej całka (całki).

Całki wybranych funkcji elementarnych:

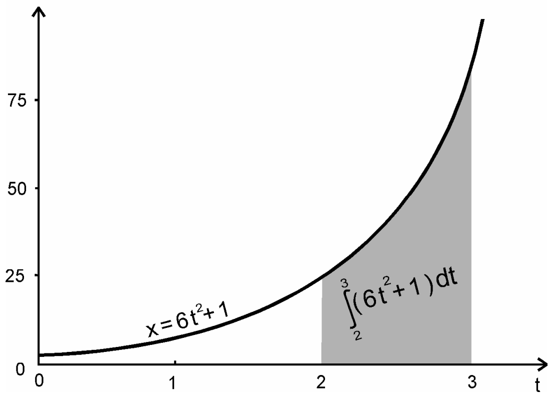
$$\boxed{\int e^t\,dt = e^t} \qquad \boxed{\int \sin t\,dt = -\cos t} \qquad \boxed{\int \cos t\,dt = \sin t} \qquad \boxed{\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}}$$

1.1.6. Całka oznaczona

Przykład (całka w granicach od 2 do 3 z funkcji „sześć t kwadrat plus jeden”, po dt):

$$\int_2^3 (6t^2+1)\,dt = [2t^3+t]_{\mathbf{2}}^{\mathbf{3}} = (2\cdot\mathbf{3}^3+\mathbf{3})-(2\cdot\mathbf{2}^3+\mathbf{2}) = 39$$

Wynikiem całki oznaczonej jest **liczba** (w przeciwieństwie do całkowania nieoznaczonego, gdzie wynikiem jest **funkcja**). Interpretacja graficzna całki oznaczonej przedstawiona jest na rys. 1.13; jest to powierzchnia pod wykresem ograniczona osią odciętych i prostymi $t=t_1$ i $t=t_2$ (gdzie t_1 i t_2 to tzw. granice całki).



Rys. 1.13. Całka oznaczona.

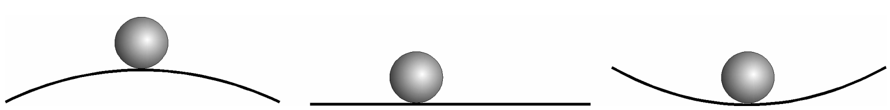
1.2. Statyka

U podstaw statyki znajdują się pojęcia środka masy i środka geometrycznego. Jeżeli w danej bryle rozkład masy jest jednorodny (gęstość jest w każdym punkcie jest taka sama), to środek masy znajduje się w tym samym miejscu, co środek geometryczny. Pojęcie środka masy bryły łatwo zrozumieć w odniesieniu do grawitacji. Jeżeli w punkcie tym umieścimy zaczep, wtedy bryła niezależnie od orientacji w przestrzeni nie będzie się poruszać (obracać). Jest to sytuacja statyczna, ponieważ wszystkie siły i momenty sił równoważą się.

W szkole omawia się trzy rodzaje równowagi – są to:

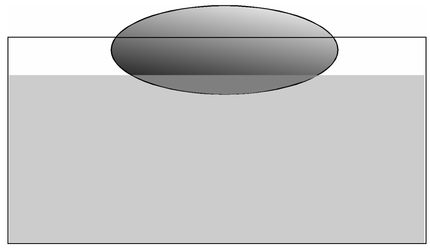
- równowaga statyczna
- równowaga obojętna
- równowaga chwiejna.

Oczywiście w każdej z tych trzech równowag suma sił jest równa zero (równowaga translacyjna) i suma momentów sił też jest równa zero (równowaga rotacyjna). Przy czym w równowadze obojętnej usytuowanie i orientacja materii nie wpływa na zmianę warunków równowagi, natomiast w równowadze stałej i chwiejnej – wpływa. Ale w przypadku równowagi stałej, brak zrównoważenia sił i momentów sił ma charakter taki, że materia stale powraca do pierwotnego położenia i orientacji (co najwyżej przez jakiś czas mogą zachodzić oscylacje wokół położenia (orientacji) równowagi. Na rys. 1.14 znajdują się ikonogramy symbolizujące różne rodzaje równowagi.



Rys. 1.14. Przykłady równowagi: chwiejnej, obojętnej i stałej.

Istnieje sporo sytuacji, w jakich równowaga translacyjna i rotacyjna może nie występować jednocześnie. Na przykład na rys. 1.15 pływający przedmiot po próbie obrócenia powróci do równowagi (bo wytworzy się niezrównoważony moment siły wyporu), po przemieszczeniu pionowym też powróci do równowagi (bo zmniejszy lub zwiększy się siła wyporu), natomiast po przesunięciu w prawo lub w lewo – przedmiot pozostaje na miejscu.



Rys. 1.15. Przykład równowagi translacyjnie obojętnej, ale rotacyjnie stałej.

1.3. Dynamika

W dziale tym rozpatruje się ruch zachodzący pod wpływem określonych sił lub momentów sił.

U podstaw dynamiki leży prawo dynamiki. Mówi się w nim, że materia porusza się z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły, jaka na nią działa. Chodzi tu o tzw. dynamikę nowożytną (określa się ją jako klasyczną, newtonowską). Do czasów Newtona (XXVII wiek) obowiązywała mechanika arystotelesowska, w której zakładało się, że materia porusza się, dopóki działa na nią siła (warunkiem ruchu jest działanie siły). Obecnie wiemy, że ruch może odbywać się bez działania siły. Siedemnastowieczny system nauki Newtona obciążony był wcześniejszym, ale na ówczesne czasy i tak awangardowym, sposobem myślenia. Mianowicie, Newton zakładał, że materia porusza pod wpływem swojej wewnętrznej właściwości, którą można nazwać impetem lub bezwładnością. Dziś wiemy, że to, czy materia porusza się czy pozostaje w spoczynku, zależy od układu współrzędnych, w jakim ten ruch jest rozpatrywany. Natomiast wielkość zwana siłą, jest sprawcą ruchu przyśpieszonego.

Przyśpieszenie jest proporcjonalne do siły

Powyższe zdanie to podstawowe prawo dynamiki klasycznej.

W szkole rozpatruje się dwa przypadki ruchu wynikającego z działania następujących sił:

1. Siła wynosi zero
2. Siła ma stałą wartość, kierunek i zwrot

W pierwszym przypadku mamy do czynienia z ruchem jednostajnym, w drugim – z ruchem jednostajnie zmiennym.

Ruch jednostajny to ruch taki, w jakim w jednakowych przedziałach czasu następują jednakowe zmiany położenia, natomiast w ruchu jednostajnie zmiennym – w jednakowych przedziałach czasu następują jednakowe zmiany prędkości. Jeden i drugi ruch jest ruchem prostoliniowym. Jest jeszcze jeden przypadek ruchu zmiennego rozpatrywany w szkole – jest nim ruch harmoniczny.

Przypadki ruchu rozpatrywane w szkole sklasyfikować trzeba ze względu na rodzaj siły powodującej dany ruch oraz ze względu na kształt toru.

Klasyfikacja ze względu na kształt toru

Ruch prostoliniowy	Ruch krzywoliniowy

Przy czym omawiane są tylko dwa przypadki ruchu krzywoliniowego: ruch po okręgu i rzut. Odnośnie do rzutu trzeba zauważyć, że w szkole omawia się, niesłusznie, osobno rzut ukośny i rzut poziomy.

Klasyfikacja ruchów ze względu na rodzaj siły

Rodzaj siły	Rodzaj ruchu jako skutek rodzaju siły
Siła wynosi zero	**Ruch prostoliniowy jednostajny (lub spoczynek)**
Siła jest stała co do wartości, kierunku i zwrotu	**Ruch jednostajnie zmienny**
Siła zmienia się w czasie	**Ruch zmienny (nieskończenie wiele możliwości)**

Przy czym, jeżeli chodzi o ruch zmienny - to w szkole rozpatrywany jest tylko jeden przypadek, czyli ruch harmoniczny. Ale przemilcza się fakt, że jest to ruch powstały w wyniku przyłożenia do określonej masy siły proporcjonalnej do współrzędnej ze znakiem przeciwnym. Mówi się natomiast, że jest to ruch stanowiący rzut ruchu po okręgu na prostą. Jest to prawdą, ale nie to jest istotą ruchu harmonicznego. Powtórzmy: istotą (przyczyną) ruchu harmonicznego jest to, że odbywa się pod wpływem siły proporcjonalnej do współrzędnej, ale ze znakiem przeciwnym.

Na poziomie matematyki szkolnej możliwe jest opisanie ruchu jednostajnie zmiennego oraz jego szczególnego przypadku – ruchu jednostajnego. Podkreślmy to: pod względem matematycznym ruch jednostajny jest szczególnym przypadkiem ruchu jednostajnie zmiennego. Znany jest bowiem „wzór" szkolny na drogę w ruchu jednostajnie zmiennym":

$$s = v_o t + \frac{at^2}{2} \tag{1.7}$$

gdzie v_o – to prędkość początkowa, natomiast a – przyśpieszenie.

„Wzór" 1.6 ma bardzo ograniczoną przydatność. Jest poprawny tylko wówczas, kiedy pozostajemy w kręgu pojęć „wczesnogimnazjalnych", takich jak „ruch jednostajnie przyspieszony" i „ruch jednostajnie opóźniony".

Najlepiej byłoby w ogóle nie mówić o „wzorach" w fizyce, które istnieją tylko w inżynierii, choć w wielu przypadków są wyprowadzone metodami fizyki. Jak już wcześniej wspomniano, **w fizyce występują tylko funkcje i równania**. A wzory na drogę w ruchu jednostajnie przyśpieszonym i jednostajnie opóźnionym?... Nie istnieją takie kategorie ruchu! Jest natomiast **ruch jednostajnie zmienny!** Ruch jednostajnie zmienny, jak każdy ruch, rozpatrujemy w dowolnie obranym układzie współrzędnych. W tym przypadku układ ów może być zredukowany do jednej osi o kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu, ale o dowolnym zwrocie i początku. Zwróćmy uwagę na rys. 1.4. Widoczny na nim ruch kamienia opisany jest funkcją ruchu jednostajnie zmiennego odnoszącą się do współrzędnej x skierowaną pionowo, o zwrocie do góry, z początkiem w miejscu rozpoczęcia ruchu. Funkcja ruchu jednostajnie zmiennego $x(t)$ zawiera w sobie informację o całej historii ruchu kamienia, która przebiega od momentu wyrzutu, do momentu upadku. Matematycznie dziedziną tej funkcji jest przedział od $-\infty$ do $+\infty$. Natomiast fizycznie od momentu wyrzutu, do momentu upadku. Rozważmy, jak wygląda funkcja ruchu kamienia w przypadkach różnych układów współrzędnych. Na rys. 1.16 znajduje się zestawienie kilku przykładów układów współrzędnych zastosowanych przy opisie tego samego zagadnienia, czyli tzw. spadku swobodnego. Warto zwrócić uwagę na ścisły związek kształtu funkcji ruchu z układem współrzędnych. Ustalając kształt funkcji ruchu kierujemy się funkcją wzorcową (w dalszej części niniejszego rozdziału znajduje się jej wyprowadzenie) dla ruchu jednostajnie zmiennego:

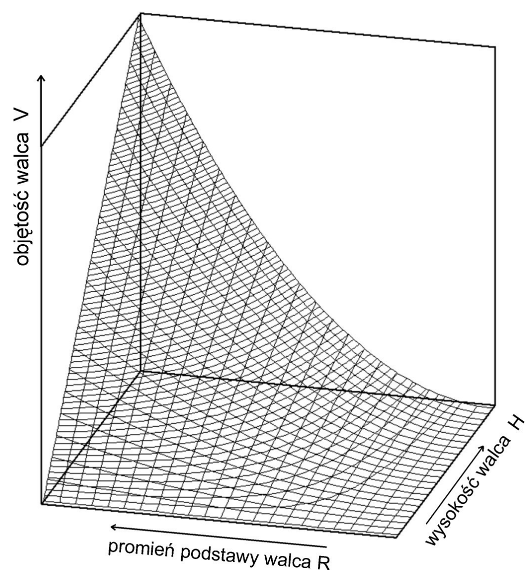
$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2} \quad (1.8)$$

gdzie:

x_o – współrzędna początkowa
v_o – szybkość początkowa
a - przyśpieszenie

Przy ustalaniu kształtu funkcji ruchu (wykorzystując funkcję wzorcową) należy zwracać uwagę na znaki przed symbolami określającymi poszczególne wielkości (są to parametry funkcji: współrzędna początkowa x_o, szybkość początkowa v_o i przyspieszenie a). Proszę zwrócić uwagę jak to uczyniono na rys. 1.16.

Chcąc uniknąć błędnego używania słowa „wzór" dobrze byłoby uświadomić sobie jego właściwe znaczenie. Wzór – to w matematyce wyrażenie algebraiczne pokazujące jak wykonać obliczenia liczbowe podczas wyliczania wartości danej wielkości. Na przykład wzór na objętość stożka o podstawie kołowej: $V = \pi R^2 H$ pokazuje, jak „wzorując" się na nim wyznacza się wartość objętości przy znajomości wartości promienia podstawy R i wartości wysokości stożka H. W gruncie rzeczy wyrażenie $V = \pi R^2 H$ też można uważać za jednoparametrową (parametr π) funkcję dwóch zmiennych $V(R,H) = \pi R^2 H$ (rys. 1.16).



Rys. 1.16. Zależność objętości walca od promienia podstawy i wysokości. Zależność ta w matematyce szkolnej określana jest jako „wzór" na objętość walca, natomiast w fizyce jest to funkcja dwóch zmiennych (jej graficznym obrazem jest powierzchnia).

Wzorem można określać także algebraiczną końcówkę rozwiązania zadania (po jego rozwiązaniu na liczbach ogólnych), bowiem wzorując się na tym końcowym wzorze podstawiamy właściwe dla danego przypadku dane liczbowe i wykonujemy rachunek już na liczbach. Częstą pomyłką jest określanie wzorami dowolnych wyrażeń algebraicznych, ponieważ nie wiadomo wtedy, czy chodzi o funkcję, czy o równanie.

Podkreślmy to jeszcze raz: występujące w fizyce wyrażenia matematyczne to funkcje i równania.

Najważniejszym omawianym w szkole zagadnieniem w zakresie dynamiki to zagadnienie ruchu jednostajnie zmiennego, a właściwie wyprowadzenia wyrażeń na szybkość i współrzędną w funkcji czasu w takim ruchu.

Najpierw zapoznajmy się z definicjami...

Szybkość w ruchu jednostajnym:

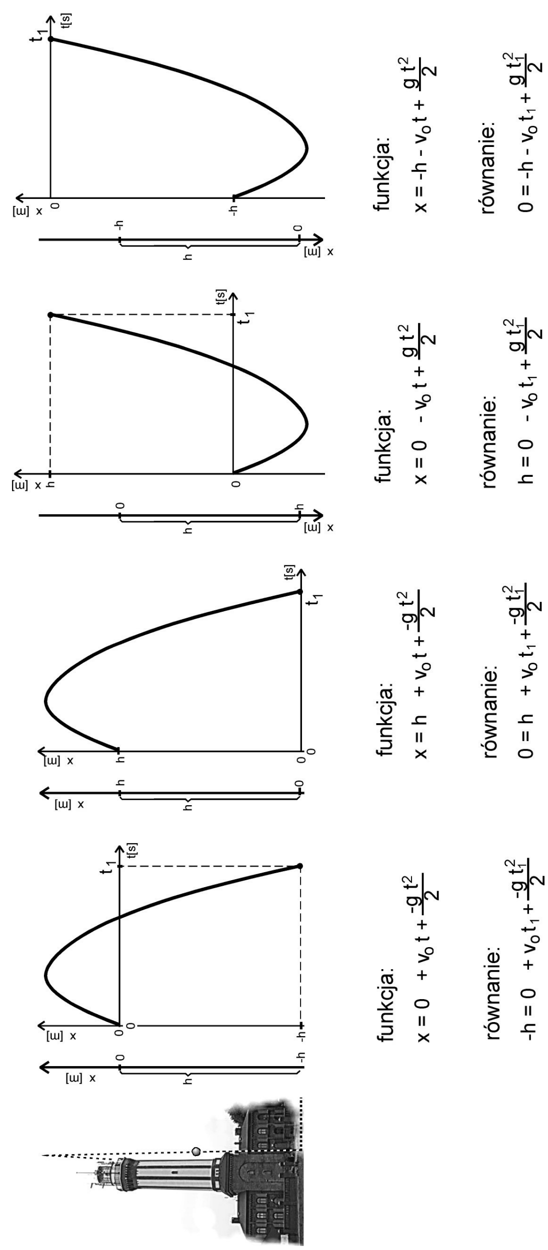
$$v = \frac{s}{t} \tag{1.9}$$

czyli wartość drogi przebytej w jednostce czasu.

Przyśpieszenie w ruchu jednostajnie zmiennym:

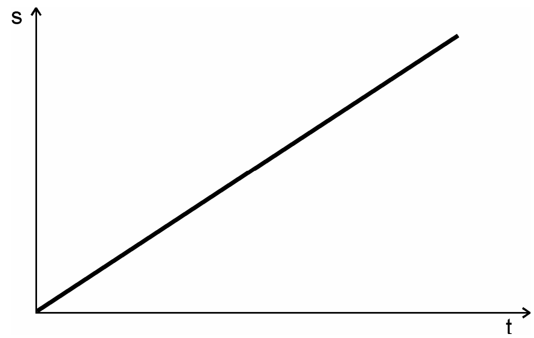
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.10}$$

czyli zmiana szybkości w jednostce czasu. Przy czym zmiana szybkości może być dodatnia (kiedy narasta) lub ujemna (kiedy maleje).



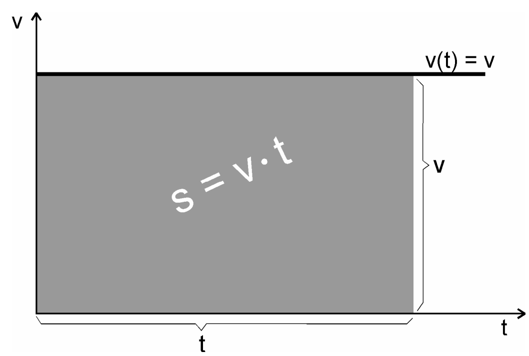
Rys. 1.17. Opis rzutu w różnych układach współrzędnych.

Definicja szybkości w ruchu jednostajnym (1.9) może być przekształcona tak, że powstanie funkcja przebytej drogi od czasu $s = v\ t$. Na rys. 1.18 jest to prosta, której współczynnikiem kierunkowym jest właśnie szybkość. Ale uwaga! Współczynnik kierunkowy to **nie** tangens nachylenia wykresu (już wcześniej była o tym mowa!). Warto o tym pamiętać, ponieważ zdarzało się widywać - brzydko ale obrazowo określając - „osoby biedzące się” przy wyznaczaniu współczynnika kierunkowego z kątomierzem (!) w ręku, z zamiarem zmierzenia kąta pomiędzy linią wykresu a osią odciętych (!) – co, najdelikatniej określając, „jest widokiem smutnym i marnym, a delikwent kiepsko rokuje...”! Trzeba, po prostu, zwrócić uwagę na to, że wielkości na osiach – po pierwsze – mają zwykle różne jednostki (tangens nie posiada jednostki) – po drugie – nawet gdyby na osiach były te same jednostki, to przecież nie zawsze są zastosowane takie same skale na osiach.



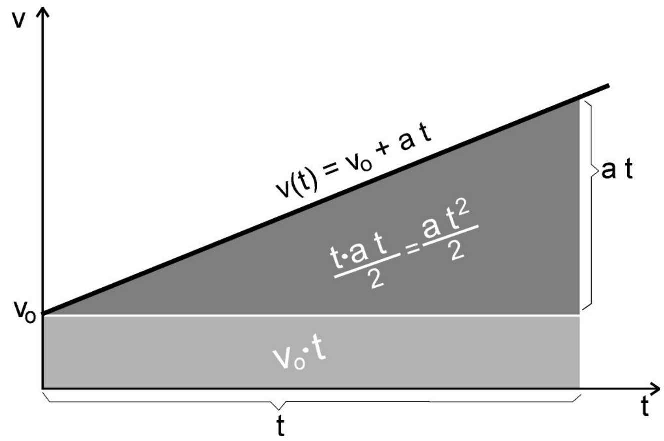
Rys. 1.18. Zależność przebytej drogi od czasu w ruchu jednostajnie zmiennym.

Na rys. 1.19 pokazano, że na wykresie $v(t)$ powierzchnia pod wykresem stanowi miarę przebytej drogi.



Rys. 1.19. Interpretacja graficzna przebytej drogi.

Również w każdym innym ruchu miarą przebytej drogi jest powierzchnia pod wykresem. Wiedząc o tym, łatwo otrzymać zapis funkcji ruchu jednostajnie zmiennego licząc powierzchnię na wykresie $v(t)$. Wykres taki przedstawiono na rys. 1.20. Podsumowując wiedzę o ruchu jednostajnie zmiennym należy stwierdzić, że jeżeli na pewną masę działa stała siła, to masa ta porusza się ruchem jednostajnie zmiennym opisanym funkcją 1.7. Natomiast, jak znaleźć opis ruchu w przypadku, gdy przyłożona siła zmienia się w czasie? Otóż w ogólnym przypadku nie daje się tego zrobić przy pomocy zwykłej matematyki geometrycznej, i w szkole takich przypadków nie rozpatruje się, ponieważ potrzebna jest do tego biegła znajomość rachunku różniczkowego i całkowego. W ruchu zmiennym prędkość definiuje się jako pochodną współrzędnej, a przyśpieszenie jako pochodną prędkości.



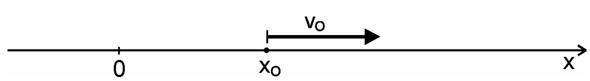
Rys. 1.20. Geometryczna interpretacja drogi przebytej w ruchu jednostajnie zmiennym.

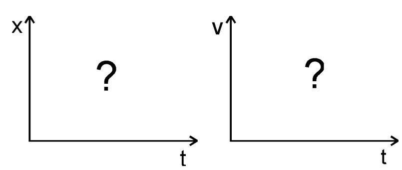
Rozważmy przykład ruchu jednostajnie zmiennego:

Do masy m, w momencie gdy miała prędkość v_o i znajdowała się na współrzędnej x_o, przyłożono stałą siłę F. Wyznaczyć funkcję opisującą prędkość oraz funkcję opisującą zmiany współrzędnej tej masy.

Rozwiązanie:

Dane:	Szukane:
m	v(t)=?
F	x(t)=?
v_o	
x_o	





$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$\downarrow$$
$$dv = a\,dt$$

Powyższe równanie całkujemy obustronnie, otrzymując:

$$v = at + C$$

Poszukujemy fizycznego znaczenia stałej całkowania C (przez zastosowanie warunku brzegowego $t=0 \Rightarrow v=v_o$):

$$v_o = a \cdot 0 + C$$
$$C = v_o$$
$$\underline{v = a \cdot t + v_o}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$dx = v\,dt$$

$$dx = (a \cdot t + v_o)\,dt$$

Po obustronnym scałkowaniu:

$$x = \frac{at^2}{2} + v_o t + C$$

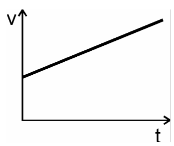
Wyznaczamy C:

$$x_o = \frac{a \cdot 0^2}{2} + v_o \cdot 0 + C$$

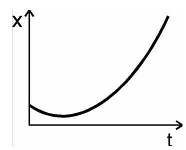
$$C = x_o$$

$$\underline{x = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_o \cdot t + x_o}$$

Odpowiedź: $v(t) = a \cdot t + v_o$



$$x(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_o \cdot t + x_o$$

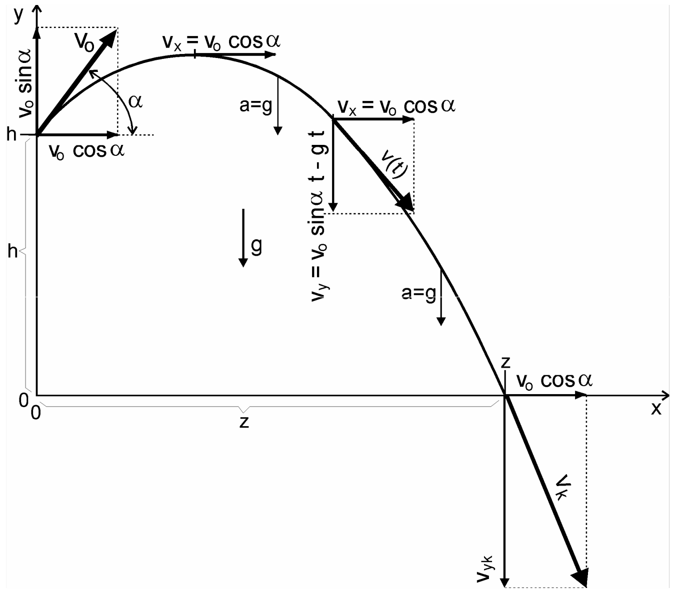


W taki sam sposób można rozwiązać dowolny przypadek dynamiczny. Trzeba tylko znać funkcję opisującą zależność siły od czasu oraz tzw. warunki brzegowe, czyli prędkość początkową i współrzędną początkową.
Przypadek działania na masę stałej siły, czyli ruch jednostajnie zmienny, a szczególnie matematyczny opis tego ruchu, to od czasów *sir* Newtona najważniejsze w dydaktyce fizyki zagadnienie. Z jednej strony wprowadza ono ucznia w zagadnienia mechaniki ogólnej, ale z drugiej strony jest ciekawe samo w sobie, ponieważ opis tego ruchu mieści w sobie opis ruchu jednostajnego i opis stanu nieruchomego. Można to łatwo sprawdzić wstawiając do funkcji $v(t)$ i $x(t)$ zero w miejsce przyśpieszenia w przypadku ruchu jednostajnego oraz wstawiając zero w miejsce prędkości początkowej w przypadku trwania w spoczynku. Dlatego nauczyciel bezwzględnie wymaga zapamiętania zapisów funkcji $v(t)$ i $x(t)$ w ruchu jednostajnie zmiennym. Prawie wszystkie przypadki dynamiczne rozpatrywane w szkole dotyczą ruchu jednostajnie zmiennego i jego szczególnego przypadku – ruchu jednostajnego. Jedynym innym rodzajem ruchu rozpatrywanym w szkole jest, jak już wspomniano, ruch harmoniczny. Ruch harmoniczny należy do kategorii ruchów zmiennych.
Wszystkie ruchy pod względem dynamicznym można sklasyfikować pod względem rodzaju działającej siły, czyli:
- kiedy siła wynosi zero (wtedy występuje ruch jednostajny, w tym bezruch – jeśli odpowiednio dobrać układ współrzędnych),
- kiedy siła jest stała (wtedy ruch jednostajnie zmienny),
- kiedy siła jest zmienna (wtedy ruch zmienny).

Przypadków ruchu zmiennego jest nieskończenie wiele, ale jak już wspomniano, w szkole rozpatrywany jest tylko jeden przypadek ruchu zmiennego, czyli ruch harmoniczny.

1.4. Kinematyka ruchu krzywoliniowego

Ruch krzywoliniowy jest złożeniem ruchów prostoliniowych. Najbardziej znanym przypadkiem ruchu krzywoliniowego jest tzw. rzut, czyli sytuacja, kiedy znamy współrzędną, na jakiej rozpoczyna się rzut, szybkość początkową i kąt rzutu względem poziomu. Zakłada się ponadto, że ruch odbywa się tuż przy powierzchni Ziemi (wtedy można pominąć zmiany przyśpieszenia ziemskiego zachodzące z wysokością), a także to, że szybkość jest na tyle mała, że można pominąć opór powietrza.



Rys. 1.21. Rzut swobodny.

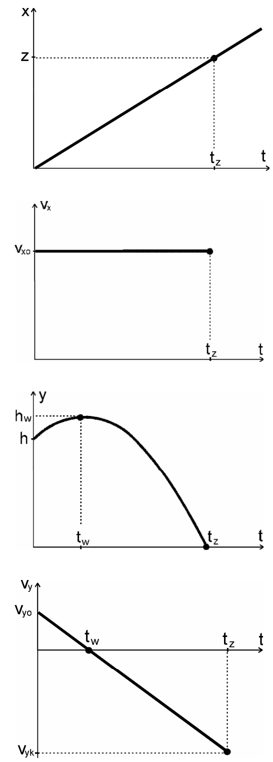
W ruchu tym do opisu współrzędnej pionowej $y(t)$ wykorzystujemy wiedzę o ruchu jednostajnie zmiennym, a do opisu współrzędnej poziomej $x(t)$ wiedzę o ruchu jednostajnym. W kierunku pionowym działa cały czas stała siła grawitacyjna, w następstwie tego przedmiot na tym kierunku porusza się ruchem jednostajnie zmiennym z przyspieszeniem g (ze znakiem ujemnym, bo oś y ma zwrot do góry). W kierunku poziomym żadne siły nie działają – stąd ruch jednostajny. Rezultat wykorzystania wyżej wspomnianej wiedzy to następujący układ funkcji (uwaga! układ funkcji, a nie układ równań).

$$x(t) = v_o \cos\alpha \cdot t$$

$$v_x(t) = v_o \cos\alpha$$

$$y(t) = h + v_o \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_y(t) = v_o \sin\alpha - gt$$



Rys. 21. Układ funkcji opisujących rzut.

Jeżeli w miejsce zmiennej niezależnej t wstawimy czas rzutu t_z, a także konsekwentnie odpowiadające mu wartości zmiennej zależnej, otrzymamy układ równań, z którego wyznaczymy zasięg z, czas rzutu t_z i składowe prędkości końcowej v_{xk} i v_{yk}. Natomiast, jeżeli w miejsce t wstawimy czas wznoszenia do położenia najwyższego t_w, to w miejsce $v_y(t)$ trzeba wstawić zero, i wtedy z powstałego układu równań jesteśmy w stanie wyliczyć wysokość maksymalnego wzniesienia h.

$z = v_o \cos\alpha \cdot t_z$	$x_w = v_o \cos\alpha \cdot t_w$
$v_{xk} = v_o \cos\alpha$	$v_x = v_o \cos\alpha$
$0 = h + v_o \sin\alpha \cdot t_z - \frac{gt_z^2}{2}$	$h_w = h + v_o \sin\alpha \cdot t_w - \frac{gt_w^2}{2}$
$v_{yk} = v_o \sin\alpha - gt_z$	$0 = v_o \sin\alpha - gt_w$

Można również wyznaczyć kształt toru po zapisaniu układu funkcji $x(t)$ i $y(t)$, traktując go jako tzw. układ równań parametrycznych krzywej. Po wyrugowaniu parametru t otrzymamy funkcję $y(x)$, której wykres stanowi tor, po jakim porusza się rzucony przedmiot (w tym przypadku parabola).

$$\begin{cases} x(t) = v_o \cos\alpha \cdot t & \rightarrow \; t = \dfrac{x}{v_o \cos\alpha} \\ y(t) = h + v_o \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} & \end{cases}$$

$$y = h + v_o \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_o \cos\alpha} - \frac{g(\frac{x}{v_o \cos\alpha})^2}{2}$$

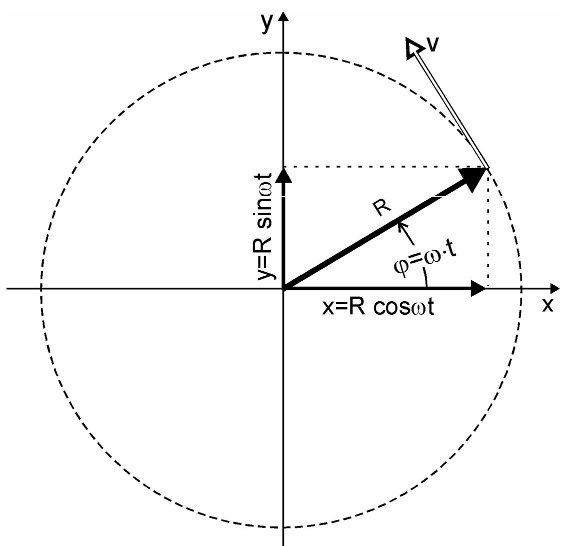
$$\downarrow$$

$$y = -\frac{g^2}{v_o^2 \cos^2\alpha} x^2 + \mathrm{tg}\alpha\, x + h$$

Wysokość maksymalnego wzniesienia można także określić wyznaczając maksimum powyższej funkcji. Oczywiście zasięg to także jedno z miejsc zerowych (o dodatniej wartości) tejże funkcji.

Możliwe jest również wyznaczenie drogi, jaką przebywa rzucony przedmiot. W tym celu można posłużyć się matematyczną procedurą wyznaczania tzw. długości łuku krzywej danej równaniami parametrycznymi. W tym przypadku będzie to długość paraboli w przedziale zmian parametru t od $t=0$ do $t=t_z$.

Drugim przypadkiem ruchu krzywoliniowego omawianym jeszcze w szkole jest ruch po okręgu. W ruchu tym przedmiot przemieszcza się po okręgu ze stałą szybkością (ale zmienną prędkością, bo cały czas zmienia się jej kierunek). W celu łatwiejszego opisania tego ruchu wprowadzono pojęcie promienia wodzącego R oraz szybkości kątowej ω (rys. 23). Promień wodzący to wektor, którego początek umieszczony jest w początku układu współrzędnych, natomiast koniec tego wektora obracający się jak wskazówka zegara wytycza tor, po jakim porusza się przedmiot. Naturalnie w tym przypadku jest to okrąg. Prędkość kątowa to kąt, o jaki obraca się promień wodzący w jednostce czasu. W ruchu po okręgu kąt φ pomiędzy osią x a wektorem wodzącym jest liniową funkcją czasu: $\varphi = \omega t$.



Rys. 1.23. Ruch po okręgu.

Składowe ruchu po okręgu łatwo ustalić posługując się rys. 1.22:

$x(t) = R \cos\omega t$

$y(t) = R \sin\omega t$

Można też sprawdzić, czy po wyrugowaniu parametru t na pewno otrzymamy równanie okręgu:

$x = R \cos\omega t$

$y = R \sin\omega t$

Po obustronnym podniesieniu do kwadratu

$$x^2 = R^2 \cos^2\omega t$$

$$y^2 = R^2 \sin^2\omega t$$

i dodaniu stronami

$$x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)$$

oraz po uwzględnieniu jedynki trygonometrycznej, rzeczywiście otrzymujemy równanie okręgu:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Promień wodzący w ruchu po okręgu daje się algebraicznie zapisać jako wektor stanowiący sumę swoich rzutów na współrzędną x i na współrzędną y. Aby to osiągnąć, trzeba posłużyć się pojęciem „wersor". Wersor, to tzw. wektor jednostkowy, czyli wektor o module jeden. Wersor nie posiada jednostki. Wersor określonego wektora to ów wektor podzielony przez jego moduł (na przykład wersor prędkości to iloraz prędkości i szybkości).

Wersor w kierunku współrzędnej x oznaczamy przez $\hat{i}$, a wersor w kierunku y - $\hat{j}$.

Zatem ruch po okręgu będzie opisany następującym wektorem:

$$\vec{r} = (R \cos\omega t)\,\hat{i} + (R \sin\omega t)\,\hat{j} \qquad (1.11)$$

W podobny sposób można postąpić z ruchem-rzutem:

$$\vec{r} = (v_o \cos\alpha \cdot t)\,\hat{i} + (h + v_o \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2})\hat{j} \qquad (1.12)$$

Wektor opisujący ruch w taki sposób, określany jest nazwą „**położenie**". W każdym przypadku ruchu, czy w najbardziej skomplikowanym, czy też w jednostajnym prostoliniowym, „położenie" zawiera pełną informację o ruchu – bo, i o prędkości, i o szybkości, drodze, przemieszczeniu, prędkości średniej, szybkości średniej, przyśpieszeniu, równaniu toru, przebytej drodze. Przykładowo: prędkość to pochodna położenia, szybkość - moduł z prędkości (szybkość to także pochodna drogi), przyśpieszenie – pochodna prędkości, składowa styczna przyśpieszenia – pochodna szybkości. Droga – całka oznaczona z szybkości.

Pozostając przy szkolnych zagadnieniach rzutu swobodnego i ruchu po okręgu policzmy niektóre wielkości kinematyczne:

Rzut	Ruch po okręgu
$\vec{r} = (v_o \cos\alpha \cdot t)\,\hat{i} + (h + v_o \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2})\hat{j}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_o \cos\alpha)\,\hat{i} + (v_o \sin\alpha - gt)\,\hat{j}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-g)\,\hat{j}$ Powiemy: rzucony przedmiot porusza się cały czas ze stałym przyśpieszeniem skierowanym prostopadle w dół (chociaż prędkość cały się zmienia co do kierunku i wartości, a tor jest parabolą).	$\vec{r} = (R\cos\omega t)\hat{i} + (R\sin\omega t)\,\hat{j}$ $\vec{v} = (-R\omega\sin\omega t)\hat{i} + (R\omega\cos\omega t)\,\hat{j}$ $v = R\omega$ $\vec{a} = (-R\omega^2\cos\omega t)\hat{i} + (R\omega^2\sin\omega t)\,\hat{j} = -\omega^2\,\vec{r}$ $a = R\omega^2$ Zauważmy, że przyśpieszenie ma kierunek taki sam jak położenie, tylko zwrot przeciwny, czyli ku środkowi okręgu. Dlatego mówi się również na nie „przyśpieszenie dośrodkowe”. Powiemy: przedmiot poruszający się po okręgu ulega przyśpieszeniu cały czas skierowanemu w kierunku do środka okręgu (prędkość jest cały czas prostopadła do przyśpieszenia). A jaką drogę przebywa przedmiot w czasie równym okresowi? $s = \int_0^T v\,dt = \int_0^T R\omega\,dt = R\,\omega\,T = R\frac{2\pi}{T}T = 2\pi R$

1.5. Ogólna zasada dynamiki

Mechanikę w szkole rozpatruje się w rozłożeniu na trzy zasady. Pierwsza zasada dotyczy sytuacji, w jakiej mamy do czynienia ze spoczynkiem lub ruchem jednostajnym, druga – gdy mamy do czynienia z ruchem jednostajnie zmiennym i trzecia – która wymusza przyporządkowanie każdej sile siły do niej przeciwnej. Z trzecią zasadą w przypadku ruchu zmiennego byłyby trudności, gdyby nie wprowadzono pojęcia siły bezwładnościowej. Siła bezwładnościowa to siła właściwa dla danej masy, gdy ta porusza się ruchem zmiennym z określonym przyśpieszeniem. Siła ta jest proporcjonalna do przyspieszenia, ale działa w kierunku przeciwnym.

Wymienione trzy szczegółowe prawa dynamiki są reprezentowane następującym stwierdzeniem, czyli prawem dynamiki:

$$\boxed{\vec{a} = \tfrac{1}{m}\vec{F}} \qquad (1.13)$$

Przyśpieszenie określonego przedmiotu jest proporcjonalne do przyłożonej do niego siły. Współczynnikiem tej proporcjonalności jest odwrotność masy. Zgodnie z zasadą dynamiki (1.13) kierunek i zwrot przyśpieszenia jest taki sam jak przyłożona siła. Ale prędkość skierowana jest zazwyczaj w kierunku innym niż przyśpieszenie. Proszę zwrócić uwagę chociażby na przykład z rys. 1.4. Mianowicie, w przykładzie tym w początkowej fazie ruchu prędkość jest skierowana do góry (w zastosowanym układzie współrzędnych dodatnia), a po osiągnięciu maksymalnej wysokości skierowana jest na dół (jest ujemna). Natomiast przyspieszenie w tym przykładzie jest skierowane cały czas na dół (jest ujemne).

Zasadę przedstawioną wyrażeniem 1.13 można przekształcić do postaci (1.14), jaką zwykł stosować *sir* Isaac Newton:

$$m\vec{a} - \vec{F} = 0 \tag{1.14}$$

Wyrażenie 1.14 to bilans sił; przy czym pierwsza siła jest siłą bezwładnościową (zwana również siłą pozorną), druga - siłą zewnętrzną (zwana również siłą rzeczywistą). Forma wyrażenia 1.14, jest atrakcyjna ze względu na estetykę (jest to, po prostu, tylko sumowanie sił). Jednak bardziej zrozumiałą, intuicyjnie oczywistą, zapewniająca mniejsze prawdopodobieństwo popełnienia błędu, jest forma 1.13. W każdym z tych zapisów, w połączeniu z warunkami brzegowymi (prędkością początkową $\vec{v}_o$ i położeniem początkowym $\vec{r}_o$) zawarta jest historia ruchu. Wystarczy, bowiem, w miejsce przyśpieszenia wstawić drugą pochodną położenia, a w miejsce siły - sumę sił zewnętrznych działających na masę, aby otrzymać równanie różniczkowe, którego rozwiązanie przynosi wyrażenie na położenie $\vec{r}$, z którego, jak już wspomniano, można wyznaczyć kompletny garnitur wielkości kinematycznych. Pozostaje tylko kwestia umiejętności rozwiązania równania różniczkowego... Rozwiązywanie równań różniczkowych to dziedzina matematyki wyższej. Zagadnienie to w dydaktyce matematyki na uczelniach wyższych wprowadzane jest w przedmiocie matematyki po uprzednim dobrym opanowaniu przez słuchaczy rachunku różniczkowego i całkowego.

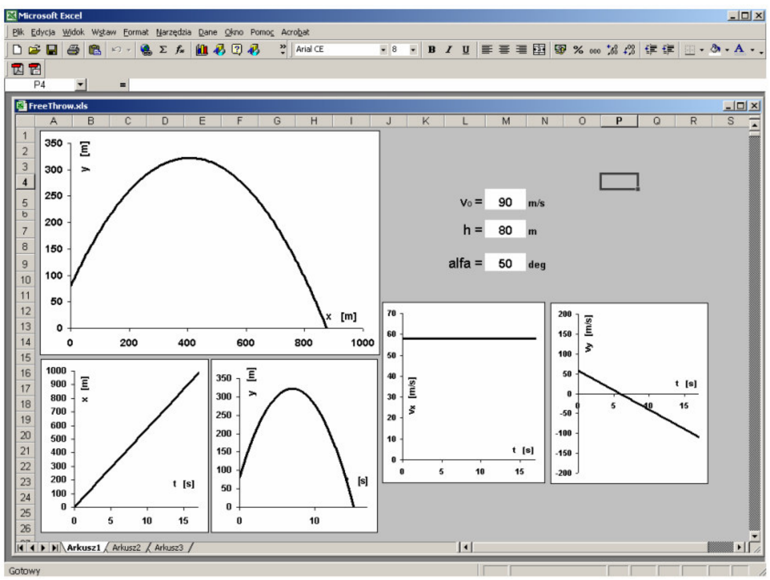
Przykład zastosowania ogólnej zasady dynamiki – ruch harmoniczny

W sytuacji, gdy siła przyłożona do określonej masy jest proporcjonalna do współrzędnej ze znakiem przeciwnym, wystąpi ruch zmienny zwany harmonicznym. Siłę tę wyrazimy następująco: $F = -kx$. Litera k reprezentuje tu współczynnik proporcjonalności, który jednocześnie porządkuje jednostki (F musi być wyrażone w niutonach, x – w metrach, zatem wymiar współczynnika k to N/m, co zapiszemy następująco: [k]=N/m). Wzorując się na wyrażeniu 1.13 zapiszemy: $a = \frac{-kx}{m}$, a po wstawieniu definicji przyspieszenia $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-kx}{m}$. Ta druga postać jest rozpoznawana jako równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem jest funkcja $x = A\sin(\omega t+\varphi)$. W funkcji tej argument sinusa to tzw. faza, która jest liniową funkcja czasu (faza = $\omega t+\varphi$). Litera φ reprezentuje tzw. fazę początkową, ω - częstość, czyli 2π razy częstotliwość f, która, z kolei, jest odwrotnością okresu T ($f = 1/T$).

Podsumowanie

Mechanika dzieli się na statykę i dynamikę. W obrębie statyki tworzy się równania ze zbilansowania sił i momentów sił. Ruch dzielimy na jednostajny i zmienny. Ruch jednostajny danej masy wystąpi wówczas, gdy siły przyłożone do tej masy równoważą się. W szkole zapamiętaliśmy ogólny kształt algebraicznego szablonu na współrzędną w ruchu jednostajnym: $x = x_o + v_ot$. Ruch zmienny wystąpi wówczas, gdy siły nie są zrównoważone. Zapamiętaliśmy w szkole szablon na współrzędną w ruchu jednostajnie zmiennym: $x = x_o + v_ot + at^2/2$. Ruch jednostajnie zmienny jest szczególnym przypadkiem ruchu zmiennego, mianowicie wtedy, gdy wypadkowa siła jest stała w czasie. Ruchów zmiennych może być nieskończenie wiele, ale tylko jeden omawiany był w szkole – ruch harmoniczny. Ruch harmoniczny odbywa się wtedy, kiedy siła przyłożona do masy jest proporcjonalna do wartości współrzędnej ze znakiem przeciwnym. Dwa przykłady ruchu krzywoliniowego omawiano w szkole: rzuty (poziomy i ukośny) oraz ruch po okręgu.

Czytelnik może czuć się dobrze przygotowany do wykładów akademickich, jeżeli potrafi samodzielnie zbudować (zbudować! - nie odtworzyć z pamięci) wyrażenie na położenie w rzucie ukośnym na określonej wysokości oraz na położenie w ruchu jednostajnym po okręgu. Natomiast, jako absolwent szkoły średniej zasługuje na ocenę bardzo dobrą, jeżeli potrafi wyprowadzić wspomniane szablony algebraiczne na ruch jednostajny i jednostajnie zmienny, a na ocenę celującą – jeśli zdoła matematycznie wykazać, że przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu jest cały czas skierowane do środka okręgu.



Rys. 1.24. Arkusz Excela z rozwiązaniem rzutu ukośnego.

W celu przećwiczenia niektórych zagadnień proszę otworzyć ich rachunkowe rozwiązania (w excelu) na stronie http://kepler.am.gdynia.pl/ kryjące się za przyciskiem „Secondary school downloads" (na rys. 1.24 znajduje się arkusz Excela, gdzie widoczne jest rozwiązanie rzutu ukośnego; zmieniając samodzielnie wartości danych można tam prześledzić jak zmieniają się wyniki).

Uwaga ! Warto sprawdzić, czy dobrze rozumie się pojęcia: położenie, przemieszczenie, trajektoria, dystans/droga, moduł przemieszczenia. W wykładzie akademickim dochodzi jeszcze „promień krzywizny". Wymiarem wymienionych wielkości jest „metr".