

2. DRGANIA

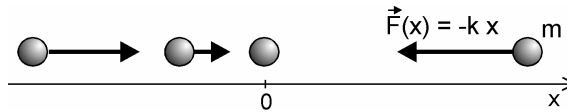
Fundamentalną ideą drgań są drgania harmoniczne proste. Słowo 'harmoniczne' podkreśla, że funkcja opisuje drgania typu sinus/cosinus, natomiast słowo 'proste' – że nie są one ani tłumione (rozdział 2.2) ani z siłą wymuszającą (rozdział 2.3).

2.1. Drgania harmoniczne proste

Zagadnienie drgań harmonicznych stanowi szczególny przypadek dynamiki. Chodzi tu o analizę prostoliniowego ruchu masy m , na jaką działa siła proporcjonalna do współrzędnej, przeciwnie skierowana, co wyraża funkcja 2.1.1:

$$F = -k x \quad (2.1.1)$$

gdzie k = współczynnik proporcjonalności.



Rys. 2.1.1. Ruch harmoniczny.

Siła F nazywana jest siłą kierującą, ponieważ kieruje masę m do początku układu - położenia równowagi.

Łatwo wykazać, że w takim przypadku masa m porusza się ruchem harmonicznym. W tym celu uwzględniamy prawo dynamiki newtonowskiej (że przyspieszenie ciała jest proporcjonalne do przyłożonej siły, a współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność masy tego ciała):

$$a = \frac{-k x}{m} \quad (2.1.2)$$

oraz definicję przyspieszenia

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.1.3)$$

Z połączenia 2.1.2 i 2.1.3 powstaje równanie różniczkowe 2.1.4:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-k x}{m} \quad (2.1.4)$$

Można zapisać w postaci sumy, której składniki - to wyrażenia przedstawiające siły 2.1.5:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k x = 0 \quad (2.1.5)$$

Pierwszy składnik to siła bezwładnościowa (siłą pozorną wynikająca z ruchu zmiennego masy m), drugi – siła zewnętrzna (rzeczywista siła działająca na masę m).

Równanie 2.1.4/2.1.5 posiada kilka rozwiązań w postaci następujących funkcji czesu:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.1.6)$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.1.7)$$

kombinacja funkcji 2.1.6 i 2.1.7

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.1.8)$$

oraz funkcja zespolona:

$$\hat{x} = A \cos(\omega t + \varphi) + j A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.1.9)$$

Postać algebraiczną funkcji zespolonej 2.1.9 można przekształcić w postać wykładniczą 2.1.10 (za pomocą tzw. wzorów Eulera):

$$\hat{x} = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.1.9)$$

EULER Leonhard (1707-1783), uczeń Johana Bernoulliego, matematyk, fizyk i filozof szwajcarski, profesor uniwersytetu w Petersburgu (na zaproszenie Katarzyny I, gdzie spędził większość życia) i Akademii Nauk w Berlinie, autor ponad około 1000 prac z dziedziny matematyki i zastosowań matematyki w fizyce, balistyce, marynistyce, a nawet muzyce. Pozostał niezwykle aktywny naukowo do końca życia, pomimo zupełnej ślepoty, jaka dotknęła go 17 lat przed śmiercią.

Wprowadził do analizy matematycznej funkcje zespolone zmiennej zespolonej i podał związek między funkcjami trygonometrycznymi i funkcją wykładniczą (np.: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$).

Z pośród setek ciekawych zagadnień, jakie rozwiązał Euler, może być tzw. zagadnienie mostów królewieckich – mianowicie: *Przez dawny Królewiec (obecnie Kaliningrad) przepływała rzeka, w której rozwidleniach znajdowały się dwie wyspy. Ponad rozwidleniami rzeki przerzucono siedem mostów, z których jeden łączył obie wyspy, a pozostałe mosty łączyły wyspy z brzegami rzeki. Problem, którym zainteresował się Euler, był następujący: czy można przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, żeby każdy przekroczyć tylko raz. Euler wykazał, że jest to niemożliwe, a decyduje o tym nieparzysta liczba wylotów mostów zarówno na każdej z wysp, jak i na oba brzegi rzeki.* Rozważał przy tym ogólniejszy problem, starając się ustalić warunki, które muszą być spełnione, żeby dany graf zamknięty można było opisać linią ciągłą w taki sposób, by każda krawędź tego grafu była obwiedziona tylko raz. Euler pokazał, że jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie węzłowym tego grafu spotyka się parzysta liczba jego krawędzi.



Funkcje 2.1.6 i 2.1.7 w bezpośredni sposób odzwierciedlają idee drgań harmoniczných prostých. Parametrom tych funkcji należy przypisać następujące znaczenia:

- A - amplituda drgań
- $\omega t + \varphi$ - faza drgań
- ω - częstość
- φ - faza początkowa drgań

Użyjmy funkcję 2.1.6 do opisu drgań harmoniczných prostých. Należy sprawdzić, czy funkcja ta na pewno spełnia równanie 2.1.5. W tym celu trzeba wyznaczyć drugą pochodną sprawdzanej funkcji i umieścić ją razem z funkcją pierwotną w równaniu 2.1.5:

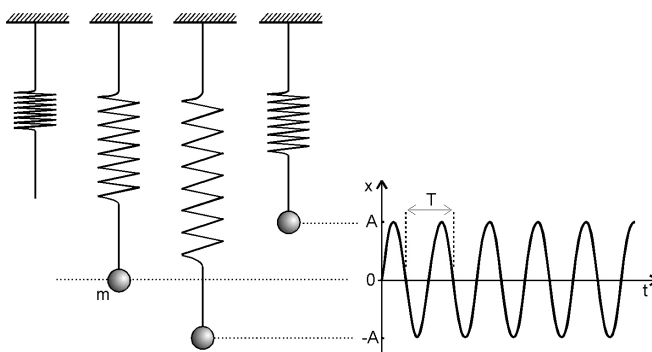
$$-m A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + k \sin(\omega t + \varphi) = 0 \quad (2.1.10)$$

Łatwo zauważyć, że powyższe równanie jest spełnione gdy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1.11)$$

Zatem funkcja 2.1.6 opisuje w pełni drgania harmoniczne o częstości ω . Działając w podobny sposób dochodzi się do wniosku, że funkcje 2.1.7, 2.1.8 i 2.1.9 także opisują drgania harmoniczne. Jednak o funkcjach zespolonych 2.1.8 i 2.1.9 należy mówić, że *nie opisują* lecz *reprezentują* drgania harmoniczne proste.

Przykładem przedstawionej idei drgań harmoniczných prostých może być ciężarek zawieszony na sprężynie.



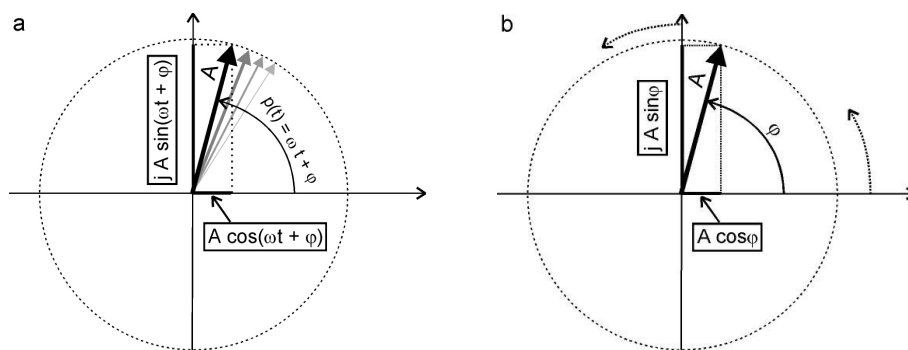
Rys. 2.1.2. Ciężarek na sprężynie wykonujący ruch harmoniczny prosty.

Sprężyna pełni w tym oscylatorze funkcję czynnika wytwarzającego siłę działającą na masę. Zależność siły sprężyny od jej wydłużenia musi mieć liniowy przebieg, to znaczy sprężyna musi być doskonale sprężysta – przynajmniej w zakresie wydłużeń nie większych od amplitudy. W przeciwnym razie ciężarek nie wykonywałby ruchu harmonicznego.

W zagadnieniu drgań harmonicznycch ukształtowało się autonomiczne nazewnictwo:

- siła F działająca na masę - siłą kierująca (układ do położenia równowagi)
- współrzędna $x(t)$ - wychylenie
- początek współrzędnej ($x = 0$) - położenie równowagi
- maksymalna wartość współrzędnej - amplituda A
- argument sinusa/cosinusa ($\omega t + \varphi$) - faza
- ω - częstość
- f - częstotliwość $f = \omega/2\pi$
- φ - faza początkowa
- T - okres drgań $T = 2\pi/\omega = 1/f$

Przydatność funkcji zespolonej (jako reprezentacji drgań) ujawnia się najbardziej wówczas, gdy przedstawiamy ją za pomocą *wskazu* w układzie nieruchomym (rys. 2.1.3a) lub w układzie wirującym z szybkością kątową ω (rys. 2.1.3b).



$$\hat{x} = A \cos(\omega t + \varphi) + j A \sin(\omega t + \varphi) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Rys. 2.1.3. Graficzne przedstawienie reprezentacji drgań harmonicznycch prostycch funkcją zespoloną w układzie nieruchomym (a) i w układzie wirującym (b).

2.1.1. Składanie drgań prostopadłych

Zagadnienie składania drgań prostopadłych - to przykład z kinematyki; polega na określaniu toru ruchu określonego przez położenie:

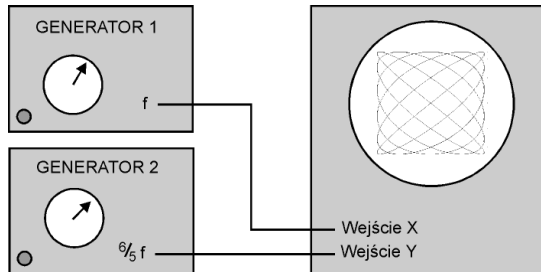
$$\vec{r}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) i + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) j \quad (2.2.1)$$

Tor jest jednoznacznie określony przez układ równań parametrycznych 2.2.2:

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

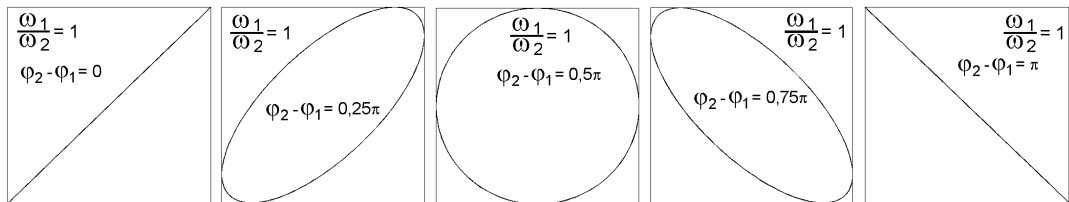
Obraz tak przedstawionego toru wytwarzany jest na wykresie $y(x)$ poprzez zaznaczanie punktów o współrzędnych obliczanych dla kolejnych wartości parametru t . Obraz ten można uzyskać także na ekranie oscyloskopu, jeżeli przebiegi $x(t)$ i $y(t)$ z generatorów podłączymy odpowiednio do zacisków odchylenia pionowego i odchylenia poziomego (rys. 2.1.1.1). Trudności pojawiają się gdy poszukujemy wyrażenia $y = f(x)$. Można próbować je pokonać poprzez wyrugowanie parametru t . Otrzymamy wówczas funkcję $y(x)$, której kształtu nie jesteśmy w stanie się domyśleć. Zależy on od wartości aż 6 parametrów: $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$.

$$y(x) = A_2 \cos\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \arccos \frac{x}{A_1} - \frac{\omega_1}{\omega_2} \varphi_1 + \varphi_2\right) \quad (2.2.3)$$

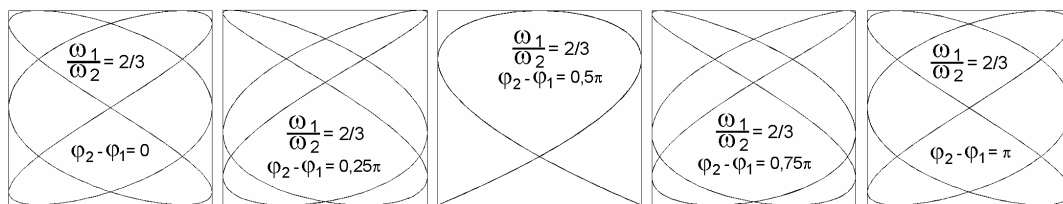


Rys. 2.1.1.1. Zasada wytwarzania krzywych Lissajous na ekranie oscyloskopu.

Praktyczna przydatność powyższej funkcji jest niewielka. Można jedynie wykazać, że w sytuacji gdy $A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2$ i $\varphi_1 = \varphi_2$, otrzymuje się przebieg prostoliniowy. Analizę kształtów toru wynikających z prostopadłego złożenia ruchów sinusoidalnych przeprowadził Lissajous. Wykazał on, że tor w postaci krzywej zamkniętej wykształca się wtedy, gdy stosunek częstości ω_1/ω_2 drgań składowych stanowi ułamek zwykły (stosunek liczb naturalnych). Jak wspomniano, obrazy krzywych Lissajous można otrzymać na ekranie oscyloskopu, a także na ekranie komputera – posługując się chociażby pakietem obliczeniowym *Excel*. Na rysunkach od 2.1.1.2 do 2.1.1.4 przedstawiono kilka przykładów krzywych Lissajous.



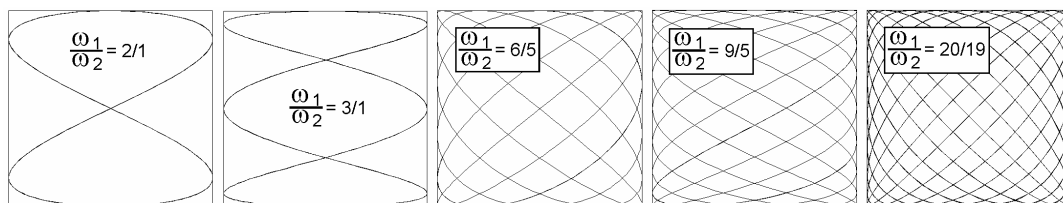
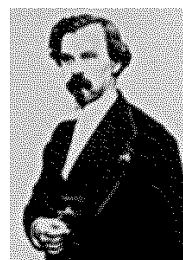
Rys. 2.1.1.2. Krzywe Lissajous uzyskiwane przy tych samych częstościach drgań składowych ale o innych różnicach faz.



Rys. 2.1.1.3. Krzywe Lissajous uzyskiwane przy tym samym stosunku częstości drgań składowych ale o innych różnicach faz.

LISSAJOUS, Jules Antoine (1822-1880)

Fizyk francuski, doktorat w 1855, profesor fizyki w Lycée Saint-Louis, rector *Academii w Chambéry* (1874) oraz *Academii w Besançon* (1875). Członek Paryskiej Akademii od 1879. Słynny z zastosowania technik optycznych do obserwacji drgań. Zmarł w Plombières.



Rys. 2.1.1.4. Krzywe Lissajous uzyskiwane przy różnych częstościach drgań składowych o różnicy faz $0,5\pi$.

2.1.2. Składania drgań równoległych

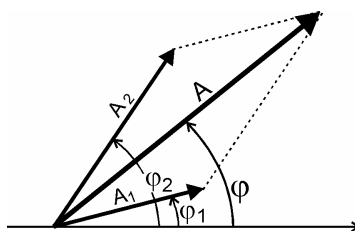
Zagadnienie składania drgań równoległych sprowadza się do problemu zsumowania dwóch funkcji opisujących drgania:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ + x_2(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x(t) &= ? \end{aligned} \tag{2.1.2.1}$$

Rozwiązanie powyższego przypadku może być łatwe w przypadku gdy rozwiązania poszukuje się w sposób numeryczny. Natomiast względnie łatwe analityczne rozwiązanie staje się możliwe tylko w szczególnych przypadkach. Pierwszy przypadek odpowiada sytuacji, gdy częstości drgań składowych są takie same (2.1.2.2).

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ + x_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{2.1.2.2}$$

Należy jedynie określić A oraz ϕ . Przydatną staje się wtedy *reprezentacja zespolona* drgań, a w szczególności *wskazy* w układzie wirującym z częstością drgań składowych. Na rysunku 2.1.2.1 przedstawiono ów graficzny sposób sumowania drgań.

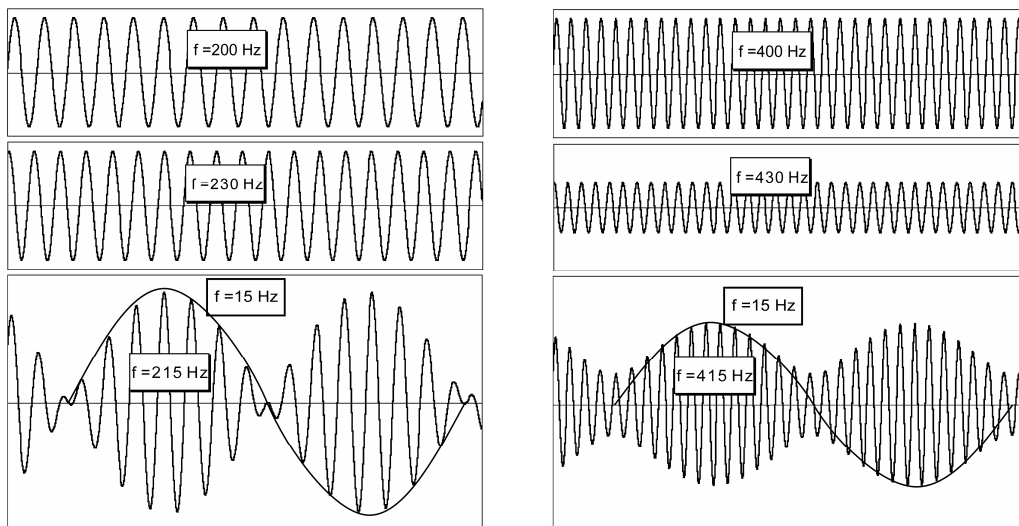


Rys. 2.1.2.1. Graficzne składanie drgań równoległych.

W tym momencie określanie A i ϕ sprowadza się do czynności trygonometrycznych.

Jeżeli częstotliwości drgań są różne, wtedy również istnieje możliwość analitycznego zsumowania tych drgań, ale pod warunkiem, że mają tę samą amplitudę. Po prostu można zastosować wzór na sumę sinusów:

$$A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t = 2A \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \quad (2.1.2.3)$$



Rys. 2.1.2.2. Składanie drgań o różnych częstościach.

W wyrażeniu 2.1.2.3 " $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ " to tzw. czynnik fazowy – informujący, że są to drgania harmoniczne. Pozostała część, czyli " $2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ ", wyraża amplitudę tych drgań. Stąd wniosek, że złożenie drgań harmonicznych o różnych częstościach skutkuje powstaniem drgań harmonicznych o częstości równej połowie sumy częstości drgań składowych z amplitudą zmieniającą się z częstością równą połowie różnicy częstości drgań składowych. Jeżeli amplitudy są różne, efekt jest podobny – co można wykazać sumując te drgania w sposób numeryczny (rys. 2.1.2.3).

2.2. Drgania tłumione

Jeżeli na masę m oprócz siły kierującej działa siła hamująca, wtedy amplituda drgań zmniejsza się z upływem czasu. Przyjmuje się, iż wartość siły hamującej jest proporcjonalna do szybkości ruchu i jest skierowana w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu. Wtedy równanie 2.1.4, po uzupełnieniu o wyrażenie przedstawiające siłę hamującą przyjmuje postać (2.2.1).

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-k x - k' \frac{dx}{dt}}{m} \quad (2.2.1)$$

Powyższe równanie można przedstawić w postaci bilansu sił (2.2.2):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + k' \frac{dx}{dt} = 0 \quad (2.2.2)$$

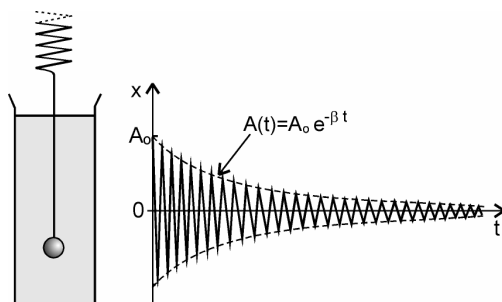
Równanie różniczkowe 2.2.2 posiada przybliżone rozwiązania zależne od wartości k' . Jeżeli współczynnik hamowania k' jest dostatecznie mały, wtedy rozwiązanie przyjmuje następującą postać (2.2.3):

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t \quad (2.2.3)$$

gdzie β - to współczynnik tłumienia drgań związany ze współczynnikiem hamowania zależnością 2.2.3.

$$\beta = \frac{2k'}{m} \quad (2.2.3)$$

Przedstawiona idea drgań słabo-tłumionych znajduje zastosowanie np. w przykładzie zanurzonego w cieczy ciężarka na sprężynie (rys. 2.9).



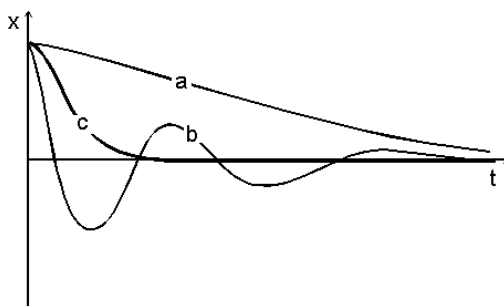
Rys. 2.2.1. Drgania harmoniczne tłumione.

Po włączeniu tłumienia częstość ulega zmniejszeniu, a wyraża to zależność 2.2.3:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.2.3)$$

W przypadku gdy tłumienie jest silne, drgania tracą charakter harmoniczny. Ich ewentualne przebiegi - dla różnych intensywności tłumienia - pokazano na rys.2.2.2. Jeżeli tłumienie jest krytyczne, to znaczy $\omega_0 = \beta$, układ równowagi powraca do stanu równowagi w czasie najkrótszym. Wychylenie w takim ruchu opisuje zależność 2.2.4:

$$x(t) = A(1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \quad (2.2.4)$$



Rys. 2.2.2 Drgania silnie tłumione (drgania anharmoniczne). Przypadek a – drgania bardzo silnie

tłumione (ruch pelzający), przypadek b – drgania silnie tłumione, przypadek c – drgania tłumione krytycznie (układ powraca do stanu równowagi w czasie najszybszym).

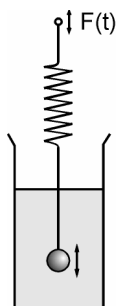
2.3. Drgania z siłą wymuszającą

Idea tego rodzaju drgań może być zapisana podobnie jak drgania harmoniczne proste oraz drgania harmoniczne tłumione, czyli w postaci równania - bilansu sił:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-kx - k' \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t}{m} \quad (2.3.1)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + k' \frac{dx}{dt} = F_0 \cos \omega t \quad (2.3.2)$$

Ideę tę można przedstawić na praktycznym przykładzie analogicznym jak dla drgań tłumionych. Dodatkowy element stanowi siła wymuszająca przyłożona do oscylatora (rys.2.3.1) - odpowiednik prawej strony w równaniu 2.3.2.

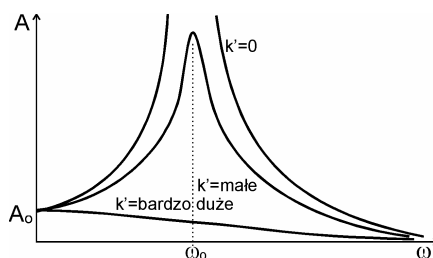


Rys. 2.3.1. Przykład oscylatora harmonicznego tłumionego z siłą wymuszającą.

Równanie różniczkowe 2.3.2 ma następujące ogólne rozwiązanie:

$$x(t) = A(\omega) \cos \omega t \quad (2.3.3)$$

Kształt zależności amplitudy tych drgań od częstości drgań wymuszających zależy od współczynnika tłumienia. Przedstawia to rysunek 2.3.2.



Rys. 2.3.2. Zależność amplitudy od częstości siły wymuszającej.

Rozwiązanie równania 2.3.2 dla stanu ustalonego, czyli po długim czasie od momentu przyłożenia siły wymuszającej, znajduje się w rozdziale 7 (wyrażenie 7.4.5).