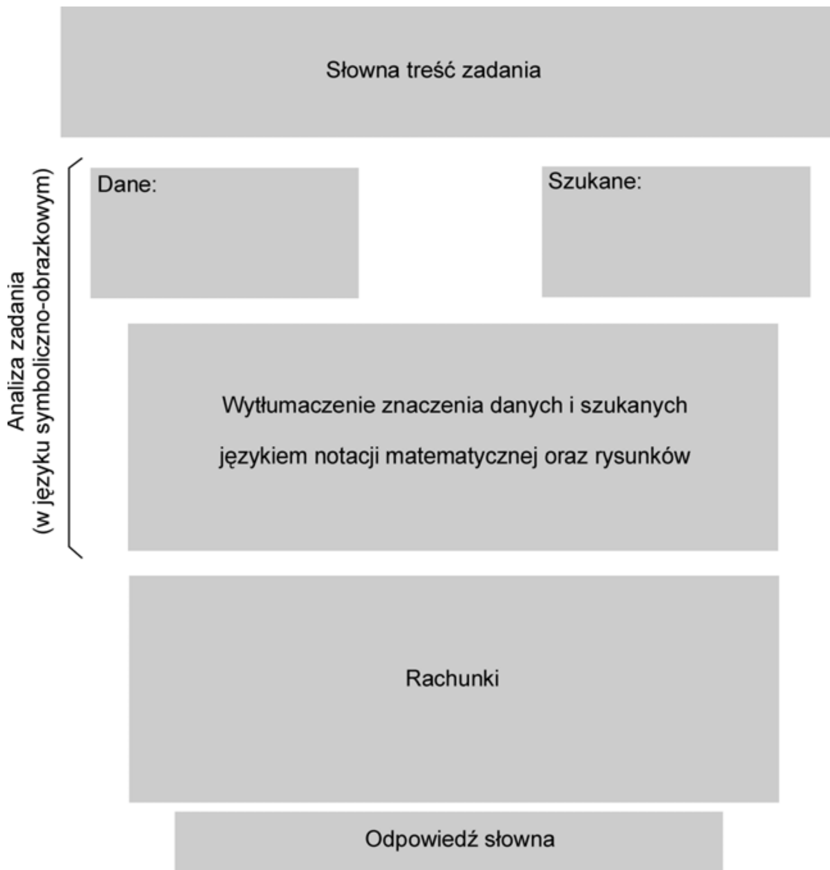
11. O ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ

Obserwowanym w realnym świecie zjawiskom przypisuje się proste modele – idee. Idee te z lepszą lub gorszą precyzją odzwierciedlają zjawiska świata realnego – zjawiska fizykalne. Treści zadań rachunkowych z fizyki, to słowne opisy prostych zjawisk fizykalnych, z użyciem ugruntowanych w fizyce pojęć oraz wielkości wraz z odpowiadającymi im wartościami liczbowymi.

Rozwiązywanie zadania bazuje na jego analizie, czyli ujęciu danych i szukanych w formie wykazu określonych wielkości fizycznych. **Wielkości fizyczne to ilościowe przedstawienie właściwości obiektów biorących udział w procesach** opisanych w zadaniu. W przypadku mechaniki są to: masy, siły, momenty bezwładności, momenty sił, współrzędne, położenia, przemieszczenia, prędkości, szybkości, przyśpieszenia itp. Naturalnie **czas** – to w mechanice kategoria najważniejsza. Czas występuje, albo jako zmienna niezależna (oznaczamy go literą t), albo jako parametr, czyli określony moment na osi czasu (wówczas do litery t dodajemy w indeksie dolnym znak/literkę/cyfrę).

Ważny jest sposób przedstawienia rozwiązania – musi być to zrozumiały komunikat. Problem ten należy traktować następująco: komunikat, jakim jest rozwiązanie zadania, powinien być zrozumiały przez wszystkich standardowo wykształconych ludzi, niezależnie od języka jakim się posługują (dlatego rozwiązanie zadania nie jest tekstem, ale zapisem za pomocą symboli oraz ideowych rysunków).

Ogólny schemat rozwiązywania zadań przedstawiono na rys. 10.1.



Rys. 10.1. Schemat przedstawiania rozwiązań zadań rachunkowych

Zadanie najlepiej rozwiązywać na liczbach ogólnych. Wskazane jest, aby na początku uporządkować jednostki w zestawie danych. Najlepiej, jeżeli wszystkie dane podajemy w układzie SI – wówczas łatwiej przeprowadzić rachunek jednostek. Po rozwiązaniu zadania, jego wynik należy zweryfikować jakościowo, to znaczy zbadać czy jest zgodny z intuicją. Druga weryfikacja – to przeprowadzenie rachunku na jednostkach. Otóż rozwiązanie byłoby na pewno wadliwe, gdyby jednostka wyniku nie zgadzała się z jednostką wyliczanej wielkości.

Poniżej przedstawione są przykłady rozwiązywania zadań (kilka zadań z mechaniki i po jednym z każdego z pozostałych działów.

Zadania z mechaniki

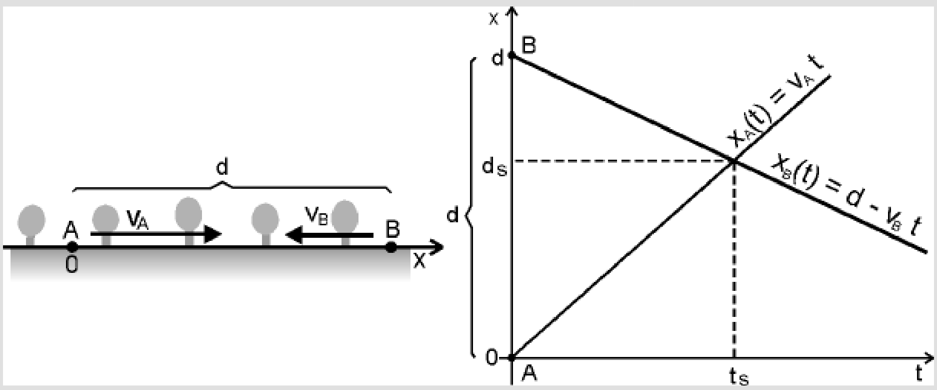
Zadanie 1a. Z dwóch miejscowości położonych w odległości 70 km ruszyli w swoim kierunku motocykliści. Jeden z szybkością 50 km/h, drugi 70 km/h. Kiedy i gdzie spotkali się?

Rozwiązanie

Idea zjawiska: Jest to prostoliniowy, jednostajny ruch dwóch punktów materialnych, z różnymi prędkościami z przeciwnymi zwrotami, z różnymi współrzędnymi początkowymi. Motocyklistę o większej szybkości oznaczmy literą A (jako że wyrusza z miejscowości A), motocyklistę wolniejszego - B (wyrusza z miejscowości B). Oś współrzędnych skierujmy od A do B, a jej początek obierzmy w punkcie A (czytelnik dla ugruntowania umiejętności może skierować oś w drugą stronę, a współrzędną początkową umieścić w innym miejscu – i przekona się, że otrzyma ten sam wynik).

Dane:
$v_A = 70$ km/h
$v_B = 50$ km/h
$d = 70$ km

Szukane:
$d_s = ?$
$t_s = ?$



Przebiegi na powyższym wykresie odzwierciedlają graficznie znajdujący się poniżej układ funkcji

$$x_A(t) = v_A\ t$$

$$x_B(t) = d - v_B\ t$$

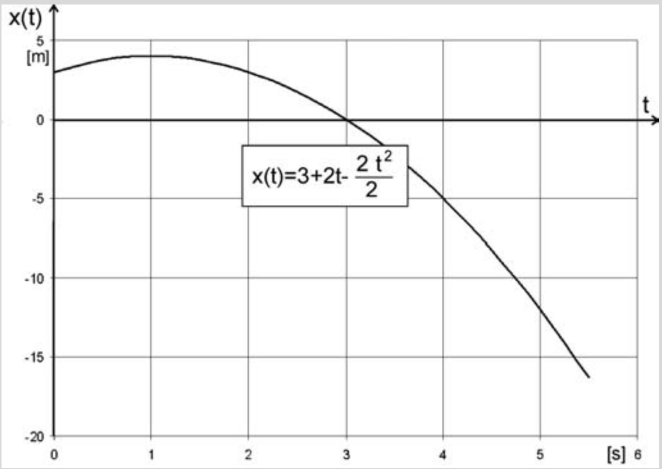
Po wstawieniu do powyższych funkcji par wartości zmiennych (t_s, d) otrzymamy następujący układ równań (jego graficznym odzwierciedleniem jest punkt przecięcia przebiegów na powyższym wykresie).

$$d_s = v_A\ t_s$$

$$d_s = d - v_B\ t_s$$

z którego wyliczamy d_s i t_s

Zadanie 1b. Punkt porusza się ruchem jednostajnie zmiennym. Współrzędna tego punktu jako funkcja czasu przedstawiona jest na poniższym rysunku.



Przedstawić wykresy zależności prędkości i przyspieszenia tego punktu od czasu.

Rozwiązanie

Jak widzimy na powyższym rysunku, punkt przez czas 1 sekundy porusza się do przodu, zatrzymuje na moment i zaczyna rozpędzać w przeciwnym kierunku. Po trzech sekundach mija początek osi i rozpędza się dalszym ciągu po ujemnej stronie osi. Cała ta historia przemieszczania się punktu ujęta jest w funkcji x(t).

Ruch jednostajnie zmienny omówiony jest w rozdziale 1 („Podstawy mechaniki") i opisany zależnością 1.8:

$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{a t^2}{2}$$

gdzie:

x_o – współrzędna początkowa
v_o – szybkość początkowa
a - przyśpieszenie

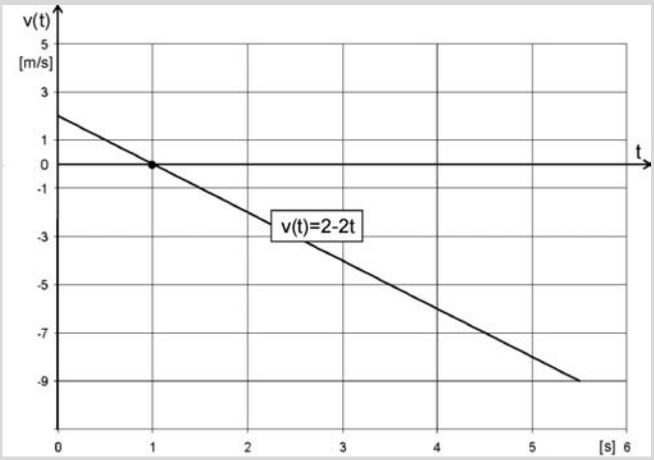
Na podanym wykresie odczytujemy parametry funkcji x(t):

$x_o = 3$ m

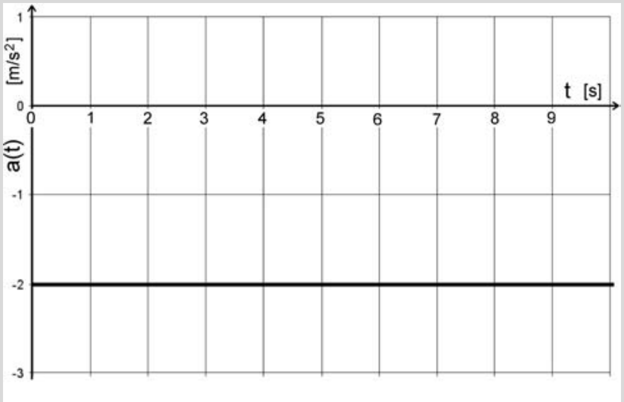
$v_o = 2$ m/s

$a = -2$ m/s^2

Prędkość w funkcji czasu to zależność liniowa: $v(t) = v_o + a\,t$



Przyśpieszenie w ruchu jednostajnie zmiennym jest funkcją stałą: $a(t) = a \;\Rightarrow\; a(t) = -2$

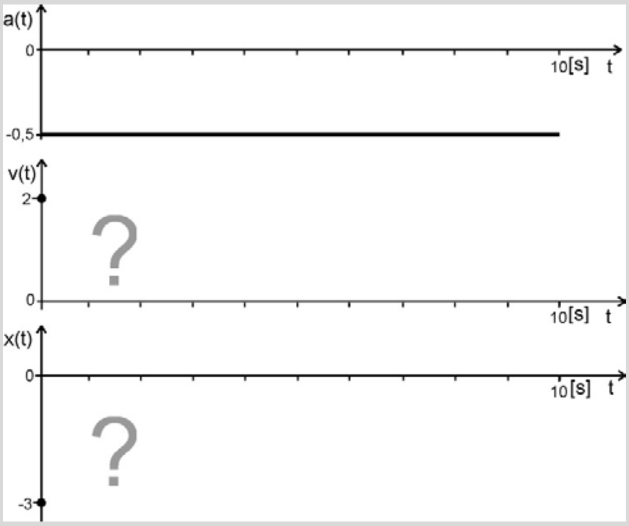


Komentarz do zad. 1a: Na wykresie x-t, tam gdzie linia opada, mamy do czynienia z prędkością ujemną, natomiast tam gdzie rośnie – z prędkością dodatnią. W miejscu ekstremum funkcji x(t) punkt zatrzymał się (nie ma zmiany współrzędnej), zatem prędkość musi w tym momencie maleć do zera (bo prędkość zmienia znak). Tam, gdzie linia wykresu x-t jest stroma – prędkość duża, natomiast tam, gdzie nachylenie linii wykresu x-t małe – prędkość mała (bo małe zmiany współrzędnej punktu w jednostce czasu). Można do tego zagadnienia podejść czysto matematycznie. Mianowicie, prędkość to pochodna współrzędnej względem czasu:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \frac{d(x_o + v_o t + \frac{at^2}{2})}{dt} = v_o + at$$

.

<u>Zadanie 1c.</u> Punkt porusza się z przyśpieszeniem -0,5 m/s^2 z punktu o współrzędnej -3 m, z prędkością początkową 2 m/s, co ukazane jest na poniższym rysunku. Dorysować wykresy v(t) oraz x(t).



Rozwiązanie

Ruch jednostajnie zmienny omówiony jest w rozdziale 1 („Podstawy mechaniki”) i opisany zależnością 1.8:

$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{a t^2}{2}$$

gdzie:

x_o - współrzędna początkowa
v_o - szybkość początkowa
a - przyśpieszenie

Na podanym wykresie odczytujemy parametry funkcji x(t):

x_o = -3 m

v_o = 2 m/s

a = -0,5 m/s^2

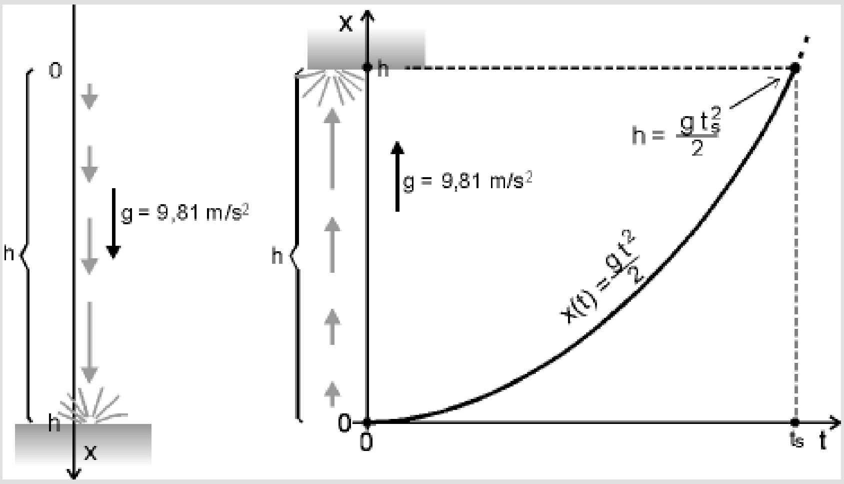
x_2 = 6, współrzędne maksimum: [4, 1]. Zatem wykreślenie linii wykresów v-t oraz x-t staje się czynnością prostą.

była wysokość?

Rozwiązanie

Idea zjawiska: Jest to prostoliniowy, jednostajnie zmienny ruch punktu materialnego, bez prędkości początkowej. Ruch ten nazwano spadkiem swobodnym.

Dane:	Szukane:
t_s = 0,4 s	h = ?



Przebieg na powyższym wykresie (parabola) jest graficznym odzwierciedleniem poniższej funkcji

$$x(t) = \frac{g\,t^2}{2}$$

Po wstawieniu do powyższej funkcji pary wartości zmiennych (t = t_s, x = h) otrzymamy następujące równanie (jego graficznym odzwierciedleniem jest punkt o współrzędnych t_s, h)

$$h = \frac{g\,t_s^{\;2}}{2}$$

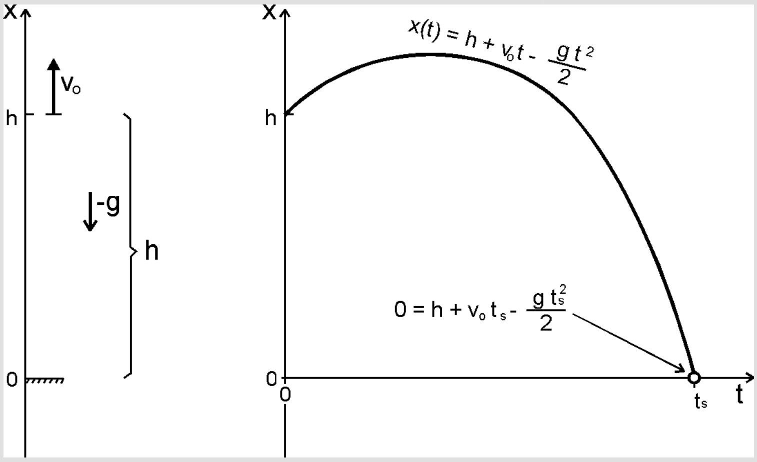
Zadanie 1e. Z helikoptera wznoszącego się pionowo z szybkością 4 m/s upuszczono przedmiot, który spadł na ziemię po 10 sekundach. Wyznaczyć wysokość, na jakiej znajdował się helikopter w momencie upuszczenia przedmiotu. W rozwiązaniu nie uwzględniać oddziaływania przedmiotu z powietrzem.

Rozwiązanie

Idea zjawiska: Prostoliniowy, jednostajnie zmienny ruch punktu materialnego z przyspieszeniem stałym 9,81 m/s^2 skierowanym w dół, z prędkością początkową 4 m/s skierowaną do góry.

Układ współrzędnych upraszcza się zatem do jednej osi zorientowanej pionowo. Przyjmijmy zwrot osi do góry, a początek osi – na poziomie ziemi. Przy okazji przypomnijmy sobie, że sposób ustalenia układu współrzędnych - czyli jego usytuowania w przestrzeni oraz początku osi - jest dowolny.

Dane:	Szukane:
$v_o = 4$ m/s	$h = ?$
$t_s = 10$ s	



$$0 = h + v_o t_s - \frac{g t_s^2}{2}$$

$$h = \frac{g t_s^2}{2} - v_o t_s$$

$$h = \frac{9{,}81 \cdot 10^2}{2} - 4 \cdot 10 = 450{,}5$$

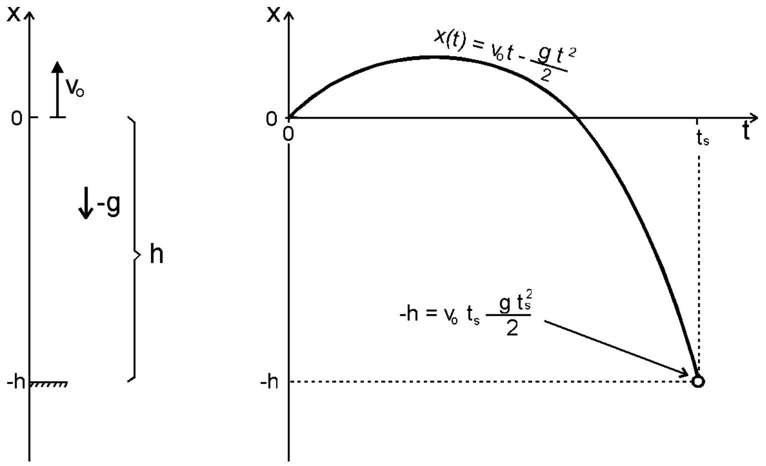
Jednostka: $\left| \frac{g t_s^2}{2} - v_o t_s \right| = \left(\frac{m}{s^2} s^2 \right) - \left(\frac{m}{s} s \right) = m - m = m$

Uwagi odnośnie algebry jednostek

1. Należy zwracać uwagę, aby nie zdarzyło się, że dodawane lub odejmowane są różne jednostki
2. Suma i różnica takich samych jednostek J daje też jednostkę J (J + J = J ; J - J = J)

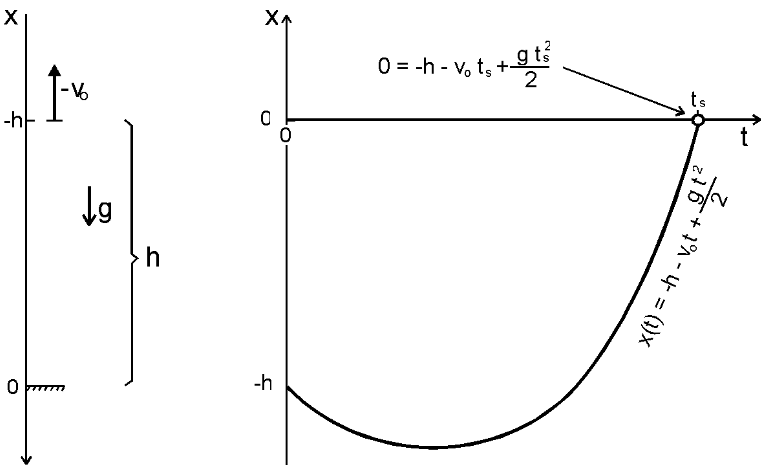
Inne komentarze do powyższego zadania:

Dane, szukane i rysunki – to analiza zadania. Zastosowano ideę ruchu jednostajnie zmiennego. W tak przyjętym układzie współrzędnych (oś x skierowana do góry z początkiem przy powierzchni ziemi) współrzędna początkowa wynosi h, prędkość początkowa v_o, przyśpieszenie jest stałe, jego liczbowa wartość wynosi „minus g".

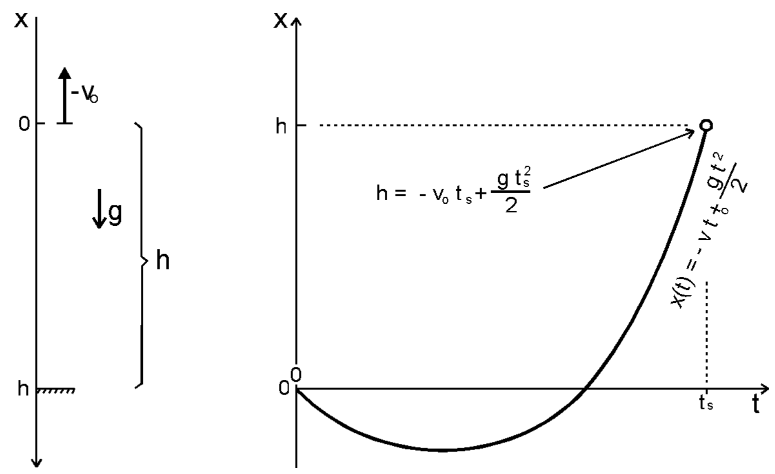


Rys. 10.1. Inna wersja rozwiązania zadania 1. Układ współrzędnych zredukowano tu do jednej osi skierowanej do góry z początkiem w miejscu upuszczenia przedmiotu. Proszę zauważyć, współrzędna miejsca upadku wynosi „minus h".

Można było przyjąć współrzędną w sposób inny, całkowicie dowolny, np. ustalając jej początek w punkcie upuszczenia przedmiotu. Wtedy poziom ziemi znajdzie się w punkcie „minus h" (rys. 10.1). Jeżeli oś odwrócimy ku dołowi (rys. 10.2), początek ustalimy przy powierzchni ziemi, wtedy współrzędna punktu upuszczenia przedmiotu to „minus h", prędkość początkowa wyniesie „minus v_o", przyśpieszenie „plus g". Jeżeli przy tak skierowanej osi ustalić jej początek w miejscu upuszczenia przedmiotu (rys. 10.3), wtedy poziom ziemi znajduje się w punkcie „plus h", prędkość początkowa jest ujemna („minus" v_o), przyspieszenie – dodatnie („plus" g).



Rys. 10.2. Inna wersja rozwiązania zadania 1. Układ współrzędnych zredukowano do jednej osi skierowanej na dół z początkiem przy powierzchni ziemi.



Rys. 10.3. Inna wersja rozwiązania zadania 1. Układ współrzędnych zredukowano do jednej osi skierowanej ku dołowi z początkiem w miejscu upuszczenia przedmiotu.

Zadanie z obliczania pracy

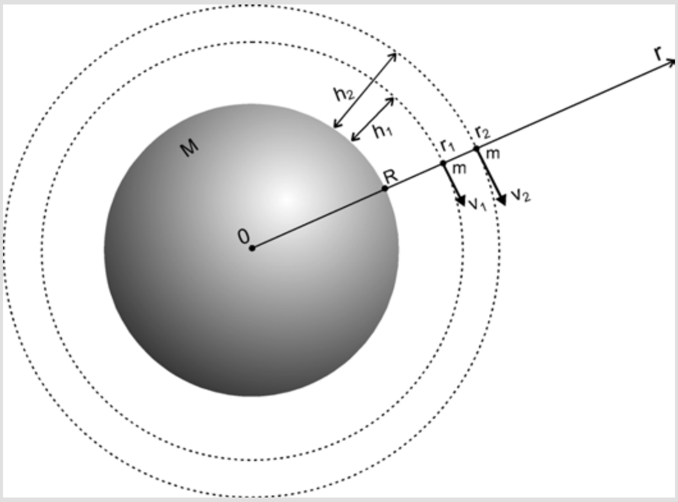
Zadanie 2. Jaką pracę muszą wykonać silniki satelity o masie 1000 kg, aby spowodować jego przemieszczenie z orbity znajdującej się na wysokości 300 km na orbitę na wysokości 400 km? Przyjmujemy, że promień Ziemi wynosi $6{,}37\cdot10^{6}$ m, a masa $6\cdot10^{24}$ kg. Stała grawitacyjna $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$

Rozwiązanie

Zadanie to ilustruje zagadnienia przedstawione w rozdziale 2 „Praca-energia”

Dane: $m = 1000$ kg
$M = 6\cdot10^{24}$ kg
$R = 6{,}37\cdot10^{6}$ m
$h_1 = 300\cdot10^{3}$ m
$h_2 = 400\cdot10^{3}$ m
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$

Szukane:
$W(h_1\rightarrow h_2) = ?$



Praca $W(h_1\rightarrow h_2)$ jest równa różnicy energii układu Ziemia-satelita pomiędzy dwoma stanami satelity: na orbicie o promieniu r_2 i orbicie o promieniu r_2:

$$W(h_1 \rightarrow h_2) = E_2 - E_1$$

Energia układu to suma energii kinetycznej i potencjalnej, zatem:

$$W(h_1 \rightarrow h_2) = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

$$E_p = -G\frac{M\,m}{r}$$

Energię kinetyczną otrzymamy z przyrównania siły dośrodkowej (grawitacyjnej) z siłą odśrodkową:

$$G\frac{M\,m}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \Rightarrow \frac{m v^2}{2} = G\frac{M\,m}{2r}$$

Zatem : $W(h_1 \rightarrow h_2) = (G\frac{M\,m}{2r_2} - G\frac{M\,m}{r_2}) - (G\frac{M\,m}{2r_1} - G\frac{M\,m}{r_1}) = GMm(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) =$

$$= GMm(\frac{1}{R+h_1} - \frac{1}{R+h_2}) = 6{,}24\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot1000\,(\frac{1}{6{,}37\cdot10^{6}+300\cdot10^{3}} - \frac{1}{6{,}37\cdot10^{6}+400\cdot10^{3}}) =$$

$$= 886{,}3\cdot10^{6}$$

Jednostka: $\left|GMm(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})\right| = \left(\frac{m^3}{s^2\,kg}\cdot kg\cdot kg\right)m^{-1} = \frac{kg\,m^2}{s^2} = J$

Zatem odpowiedź jest następująca: silniki muszą wykonać pracę równą 885,3 MJ (megadżuli).

Zadanie z ruchu drgającego

Zadanie 3. Po jakim czasie amplituda drgań zmaleje e-krotnie, jeżeli wiadomo, że dwa razy maleje po czasie 10 s?

Rozwiązanie

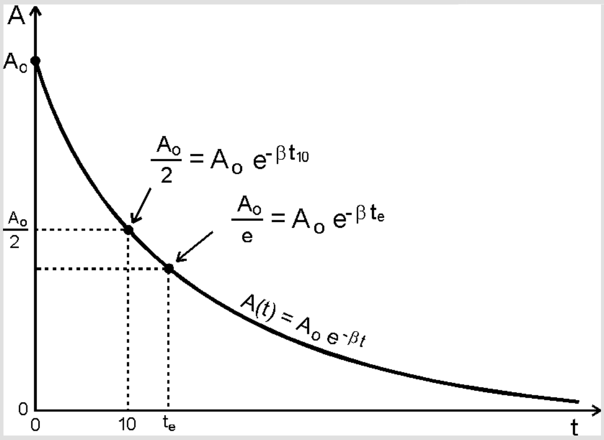
Zadanie to odnosi się zagadnień ruchu drgającego (rozdział 3), a dokładnie - do tzw. drgań słabotłumionych.

Dane:

$A(t_{10}) = A_o/2$
$A(t_e) = A_o/e$
$t_{10}=10$ s

Szukane:

$t_e = ?$



$$\frac{A_o}{2} = A_o\, e^{-\beta t_{10}}$$

$$\frac{A_o}{e} = A_o\, e^{-\beta t_e}$$

Obydwa równania powyższego układu obustronnie logarytmujemy otrzymując odpowiednio:

$$\ln 2 = \beta t_{10}$$

$$1 = \beta t_e$$

Odp: $t_e = 10/\ln 2 \sim 14{,}43$ s.

<u>Zadanie 4</u>. Soczewka w powietrzu jest rozpraszającą i posiada ogniskową f_1 = -5 cm. Po jej zanurzeniu w wodzie (współczynnik załamania 1,33) stała się soczewką skupiającą o ogniskowej f_2 = 100 cm. Jaki jest współczynnik załamania materiału, z jakiego wykonana jest soczewka?

Rozwiązanie

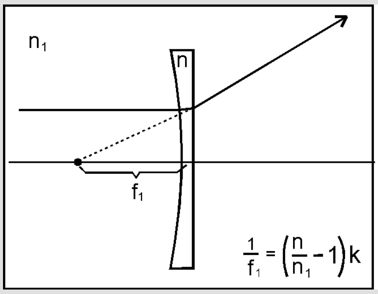
Zadanie odnosi się do zagadnień optyki geometrycznej (rozdział 4), a dokładnie – do równań soczewkowych.

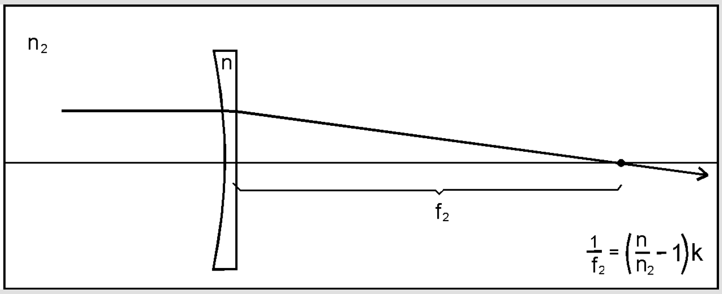
Dane:

f_1 = - 5 cm
f_2 = 100 cm
n_1 = 1
n_2 = 1,33

Szukane:

n =?





Korzystamy z zależności 4.6, w której stały czynnik $(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2})$ zastąpiony został literą k. Uwzględniając dwie sytuacje umieszczania tej samej soczewki w dwóch ośrodkach (o współczynnika załamania n_1 i n_2) otrzymujemy dwa równania z dwiema niewiadomymi: n oraz k.

$$\frac{1}{f_1} = (\frac{n}{n_1} - 1)k$$

$$\frac{1}{f_2} = (\frac{n}{n_2} - 1)k$$

Z podzielenia stronami powyższych równań otrzymujemy równanie z jedna niewiadomą, którą jest szukana – współczynnik załamania n materiału, z jakiego wykonana jest soczewka:

$$n = \frac{f_1 - f_2}{\frac{f_2}{n_2} - \frac{f_1}{n_1}} = \underline{1{,}25}$$

Zadanie z hydrodynamiki

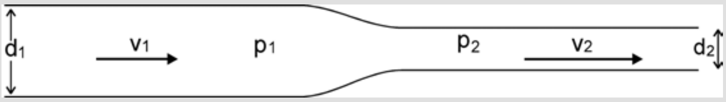
<u>Zadanie 5</u>. W poziomej rurze płynie woda. W miejscu, gdzie średnica rury wynosi d_1 = 4 cm, szybkość wody wynosi v_1 = 1 m/s, a ciśnienie $1{,}5{\cdot}10^5$ Pa. Jakie ciśnienie panuje w miejscu, w jakim średnica rury zwęża się do 2 cm?

Rozwiązanie

Zadanie odnosi się do zagadnień dynamiki płynów (rozdział 5), a dokładnie – do równania Bernoulliego oraz do równania ciągłości przepływu.

Dane:

d_1 = 4 cm
v_1 = 1m/s



Równanie Bernoulliego: $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = p_1 - \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

Równanie ciągłości: $v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \quad \Rightarrow \quad v_2 = 4v_1$

$$p_2 = p_1 - 7{,}5\,\rho v_1^2 = 1{,}5{\cdot}10^5 - 7{,}5{\cdot}\,998 = 1{,}425{\cdot}10^5 \text{ Pa}$$

Zadanie z termodynamiki

ciśnieniem p_1 = 800 000 Pa. Jak zmieni się ciśnienie gazu, jeżeli zbiornik ten połączymy cienką rurką z drugim, takim samym, ale pustym zbiornikiem, a następnie całość podgrzejemy o 50°?

Rozwiązanie

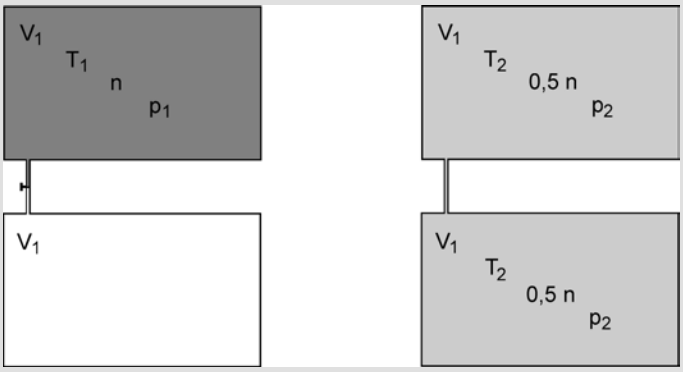
Zadanie odnosi się do zagadnień termodynamicznych (rozdział 5), a dokładnie – do równania stanu gazu Clapeyrona.

Dane:

$V_1 = 20\ dm^3$
$T_1 = 20^oC = 293$ K
p_1 = 800 000 Pa
$V_2 = 2\ V_1$
T_2 = 343 K

Szukane:

p_2 =?



$$p_1 V_1 = n R T_1$$

$$p_2 2V_1 = n R T_2$$

$$\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$p_2 = \frac{T_2\, p_1}{2\, T_1} = \frac{343 \cdot 800000}{2 \cdot 293} = \underline{468259{,}4 \text{ Pa}}$$

Zadanie z pola siłowego

Zadanie 7. W obszar pola magnetycznego o indukcji 5 mT wlatuje z szybkością 100 m/s prostopadle do linii sił pola cząstka o masie 10^{-20} kg obdarzona ładunkiem 10^{-15} C i zaczyna poruszać się po okręgu. Wyznaczyć promień tego okręgu oraz częstotliwość cyklotronową.

Rozwiązanie

Zadanie odnosi się do zagadnień związanych z polami siłowymi (rozdział 7), a dokładnie – do pola magnetycznego. Wykorzystane są również wiadomości o ruchu po okręgu (jakie znajdziemy pod koniec w rozdziału 1).

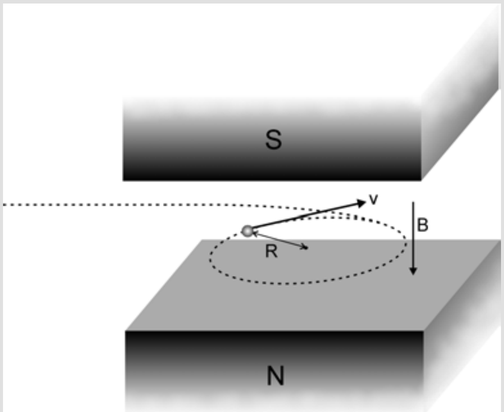
Dane:

$B = 5\cdot 10^{-3}$ T
$v = 1000$ m/s
$m = 10^{-21}$ kg
$q = 10^{-15}$ C

Szukane:

R =?

f = ?



Siła Lorentza (rozdz. 6.3) jest tutaj siłą dośrodkową. Jak zawsze, w zadaniach gdzie mamy do czynienia z ruchem po okręgu, warto spróbować co dobrego wyniknie z przyrównania siły dośrodkowej z odśrodkową:

$$Bqv = \frac{mv^2}{R}$$

Z powyższego równania wyliczamy promień okręgu: $R = \frac{mv}{Bq} = \frac{10^{-21} \cdot 1000}{0{,}005 \cdot 10^{-15}} = \underline{0{,}2\ m}$

Częstotliwość cyklotronowa f, to częstotliwość prostopadłych drgań (dwóch prostopadłych oscylatorów), jakie składają się na ruch po okręgu. Częstość $\omega = 2\pi f$ to jednocześnie szybkość kątowa ruchu po okręgu v/R. Zatem częstotliwość cyklotronowa zostanie wyznaczona z równania $\frac{Bq}{m} = 2\pi f$

$$f = \frac{Bq}{2\pi m} = \frac{0{,}005 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-21}} = \underline{795{,}8\ Hz}$$

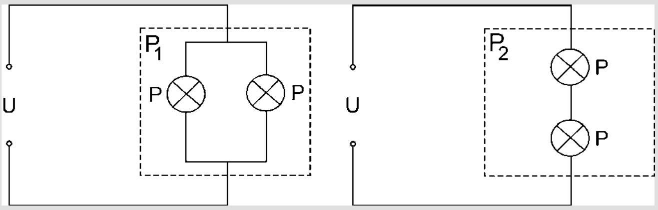
Zadanie z elektryczności

Zadanie 8. Jak zmieni się ilość światła emitowanego z połączonych dwóch takich samych żarówek, jeżeli połączenie równoległe zamienimy na szeregowe?

Rozwiązanie

Zadanie odnosi się do zagadnień elektrycznych (rozdział 8), a dokładnie – do definicji mocy prądu elektrycznego oraz praw Kirchhoffa.

Dane:



Szukane:

$$\frac{P_1}{P_2} = ?$$

Moc P jest mocą nominalną, czyli wydzielaną w przypadku podłączenia żarówki do napięcia nominalnego U, i jest równa UI, gdzie I oznacza nominalną wartość prądu w żarówce. Oporność żarówki R = U/I, czyli $R = U^2/P$.

W przypadku równoległego połączenia żarówek płynie prąd $I_1 = U/R_1 = U/0{,}5R = 2U/R$.

Wydziela się zatem moc $P_1 = U^2/R_1 = 2U^2/R$.

Natomiast przy szeregowym połączeniu żarówek oporność ich „zestawu” wyniesie $R_2 = 2R$, wydzielaną moc przez analogię zapiszemy następująco $P_2 = U^2/R_2 = U^2/2R$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{2U^2}{R}}{\frac{U^2}{2R}} = 4 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{P_1}{4}$$

Odpowiedź: Intensywność świecenia zestawu 2 żarówek połączonych równolegle zmaleje 4 razy w wyniku połączenia ich szeregowo.

Zadanie z promieniotwórczości

Zadanie 9. Jaki wiek ma drewniane znalezisko archeologiczne, jeżeli koncentracja radioaktywnego węgla ^{14}C jest w nim 4 razy mniejsza niż w drewnie współczesnych drzew?

Rozwiązanie

Zadanie odnosi się do zagadnień fizyki jądrowej (rozdział 9), a dokładnie – do rozpadu promieniotwórczego.

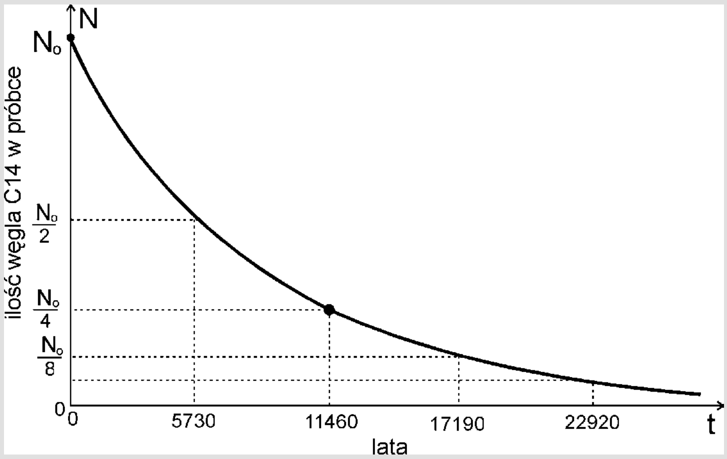
Dane:

$N_o = N_o$
$N(t_x) = N_o/4$
$T_{1/2} = 5730$ lat

Szukane:

$t_x = ?$

W czasie jednego okresu połowicznego rozpadu ilość izotopu promieniotwórczego maleje 2-krotnie. Zatem ilość zmniejsza się 2·2=4 razy po czasie dwóch okresów (a np. 2·2·2·2·2=32 razy po czasie pięciu okresów).



Odpowiedź: Znalezisko ma około 11500 lat.